Panoramas & Synthèses
42-43, 2014, p. 63–91

SCHÉMAS EN GROUPES DE TYPE MULTIPLICATIF

par

Joseph Oesterlé

Résumé. – Ce texte reprend sans changements majeurs les notes rédigées par l'auteur pour préparer ses exposés oraux. Il fournit un synopsis détaillé de la théorie, sans entrer dans les détails de certaines démonstrations. Il a été inclus dans ce volume à la demande pressante des éditeurs. Ceux-ci signalent d'ailleurs que plusieurs démonstrations présentent des simplifications par rapport au texte original de [**1**].

***Abstract* (Group schemes of multiplicative type).** – This text contains, without any major changes, the notes written by the author to prepare his talks. It gives a detailed summary of the theory, without going into the details of certain proofs. It has been included in this volume at the urgent request of the editors. The latter would moreover like to point out that several proofs give simplifications of those in the original text of [**1**].

0. Introduction

Dans ces exposés, S désigne un schéma. Un S-schéma est un schéma T muni d'un morphisme de schémas de T dans S, appelé le morphisme structural.

Certains énoncés, entre astérisques, sont donnés à titre informatif : leur démonstration se situe à un stade ultérieur de la théorie.

I. SCHÉMAS EN GROUPES DIAGONALISABLES

1. Foncteur des points d'un S-schéma

1.1. Définition

Soit X un S-schéma. On appelle *point de* X *à valeurs dans un* S-*schéma* T un morphisme de S-schémas de T dans X. L'ensemble de ces points se note $X(T)_S$, ou simplement X(T) lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur S.

***Classification mathématique par sujets* (2010).** – 14L15, 14F20.
Mots clefs. – Schémas en groupes, tores, cohomologie de Hochschild.

Pour tout S-schéma T, posons $h_{\mathrm{X}}(\mathrm{T}) = \mathrm{X}(\mathrm{T})_{\mathrm{S}}$. Pour tout morphisme de S-schémas $u : \mathrm{T}' \to \mathrm{T}$, notons $h_{\mathrm{X}}(u) : \mathrm{X}(\mathrm{T})_{\mathrm{S}} \to \mathrm{X}(\mathrm{T}')_{\mathrm{S}}$ l'application $f \mapsto f \circ u$. On définit ainsi un foncteur contravariant h_{X} de la catégorie des S-schémas dans la catégorie des ensembles, appelé le *foncteur des points du* S-*schéma* X.

Soit Y un second S-schéma et soit $v : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de S-schémas. On définit un morphisme de foncteurs $h_v : h_{\mathrm{X}} \to h_{\mathrm{Y}}$ de la manière suivante : pour tout S-schéma T, l'application $h_v(\mathrm{T}) : h_{\mathrm{X}}(\mathrm{T}) \to h_{\mathrm{Y}}(\mathrm{T})$ est $f \mapsto v \circ f$.

1.2. Lemme de Yoneda

Soit F un foncteur contravariant de la catégorie des S-schémas dans la catégorie des ensembles. Soient X un S-schéma et $\xi \in \mathrm{F}(\mathrm{X})$. Pour tout S-schéma T, considérons l'application $f \mapsto \mathrm{F}(f)(\xi)$ de $h_{\mathrm{X}}(\mathrm{T})$ dans $\mathrm{F}(\mathrm{T})$; ces applications définissent un morphisme de foncteurs $\widetilde{\xi} : h_{\mathrm{X}} \to \mathrm{F}$.

Tout morphisme de foncteurs $\varphi : h_{\mathrm{X}} \to \mathrm{F}$ est de cette forme pour un unique $\xi \in \mathrm{F}(\mathrm{X})$: ξ est l'image de id_{X} par l'application $\varphi(\mathrm{X}) : h_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}) \to \mathrm{F}(\mathrm{X})$.

En particulier, si X et Y sont des S-schémas, tout morphisme de foncteurs $h_{\mathrm{X}} \to h_{\mathrm{Y}}$ est de la forme h_v pour un unique morphisme de S-schémas $v : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$.

1.3. Foncteurs représentables

Un foncteur contravariant F de la catégorie des S-schémas dans la catégorie des ensembles est dit *représentable* s'il existe un S-schéma X et un isomorphisme de foncteurs $h_{\mathrm{X}} \to \mathrm{F}$; on dit alors que le S-schéma X, muni de l'élément $\xi \in \mathrm{F}(\mathrm{X})$ qui définit cet isomorphisme, *représente le foncteur* F, et que ξ est *l'élément universel de* $\mathrm{F}(\mathrm{X})$. Le couple (X, ξ) possède en effet la propriété universelle suivante : pour tout S-schéma T et tout $\eta \in \mathrm{F}(\mathrm{T})$, il existe un unique S-morphisme $f : \mathrm{T} \to \mathrm{X}$ tel que $\mathrm{F}(f)(\xi) = \eta$.

Si (X, ξ) et (X', ξ') représentent tous deux le foncteur F, l'unique S-morphisme $u : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ tel que $\mathrm{F}(u)(\xi') = \xi$ est un isomorphisme. Lorsque F est représentable, le couple (X, ξ) qui le représente est donc *unique à isomorphisme unique près.*

1.4. Exemples

a) Soient X, Y des S-schémas. Le foncteur $h_{\mathrm{X}} \times h_{\mathrm{Y}} : \mathrm{T} \mapsto h_{\mathrm{X}}(\mathrm{T}) \times h_{\mathrm{Y}}(\mathrm{T})$ est représenté par le S-schéma $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$, muni de ses deux projections.

b) Soient X et S′ deux S-schémas. La restriction du foncteur h_{X} à la catégorie des S′-schémas est représentée par le S′-schéma $\mathrm{X}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, muni de sa première projection.

c) Le foncteur qui à un S-schéma T associe l'ensemble de ses fonctions régulières est représenté par la droite affine $\mathbb{A}^1_{\mathrm{S}} = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[t])$ sur S, munie de la fonction régulière t.

d) Soient X et Y deux S-schémas. Le foncteur qui à un S-schéma T associe l'ensemble des morphismes (resp. des isomorphismes) de T-schémas de X_{T} dans Y_{T} se note $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ (resp. $\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$). Il n'est pas toujours représentable. Lorsque

$X = Y$, il se note $\underline{\mathrm{End}}_S(X)$ (resp. $\underline{\mathrm{Aut}}_S(X)$). Si les foncteurs $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$, $\underline{\mathrm{Hom}}_S(Y,X)$, $\underline{\mathrm{End}}_S(X)$ et $\underline{\mathrm{End}}_S(Y)$ sont représentables, il en est de même du foncteur $\underline{\mathrm{Isom}}_S(X,Y)$.

1.5. S-schémas affines

Un S-schéma X est dit *affine* si l'image réciproque par le morphisme structural $p : X \to S$ de tout ouvert affine de S est un ouvert affine de X. Il suffit pour cela que cette condition soit satisfaite par des ouverts affines de S recouvrant S.

Le foncteur $X \mapsto p_*(\mathscr{O}_X)$ est une équivalence de la catégorie des S-schémas affines dans la catégorie opposée à celle des $\mathscr{O}_S$-algèbres quasi-cohérentes. Un foncteur inverse à transformation naturelle près est $\mathscr{A} \mapsto \mathrm{Spec}(\mathscr{A})$.

Supposons que X soit un S-schéma affine et posons $\mathscr{A} = p_*(\mathscr{O}_X)$. Le foncteur des points de X s'identifie alors au foncteur qui à un S-schéma $T \xrightarrow{q} S$ associe l'ensemble des homomorphismes de $\mathscr{O}_S$-algèbres de $\mathscr{A}$ dans $q_*(\mathscr{O}_T)$.

2. Schémas en groupes

2.1. Définition

Un S-*schéma en groupes*, ou *schéma en groupes au-dessus de* S, est un S-schéma G muni d'un S-morphisme $m : G \times_S G \to G$ (la loi de composition) tel que, pour tout S-schéma T, l'ensemble $G(T)_S$ muni de la loi de composition $(u,v) \mapsto m \circ (u,v)$ déduite de m soit un groupe. Si de plus les groupes $G(T)_S$ sont commutatifs, on dit que G est un S-schéma en groupes *commutatif*.

On appelle *schéma en groupes* un schéma en groupes au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

Soient G un S-schéma et $m : G \times_S G \to G$ un S-morphisme. Pour que (G,m) soit un S-schéma en groupes, il faut et il suffit, d'après le lemme de Yoneda, que les conditions suivantes soient satisfaites :

a) Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G \times_S G \times_S G & \xrightarrow{m \times \mathrm{id}_G} & G \times_S G \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_G \times m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ G \times_S G & \xrightarrow{m} & G \end{array}$$

est commutatif (*associativité de la multiplication*).

b) Il existe une section $e : S \to G$ (*la section neutre*) de G telle que les morphismes composés

$$G \xrightarrow{(e\circ p,\, \mathrm{id}_G)} G \times_S G \xrightarrow{m} G \quad \text{et} \quad G \xrightarrow{(\mathrm{id}_G,\, e\circ p)} G \times_S G \xrightarrow{m} G\,,$$

où $p : G \to S$ est le morphisme structural de G, soient égaux à id_G. Celle-ci est alors unique.

c) Il existe un morphisme de S-schémas $\iota : G \to G$ (*passage à l'inverse*) tel que les morphismes composés

$$G \xrightarrow{(\iota,\, \mathrm{id}_G)} G \times_S G \xrightarrow{m} G \quad \text{et} \quad G \xrightarrow{(\mathrm{id}_G,\, \iota)} G \times_S G \xrightarrow{m} G$$

soient égaux à $e \circ p$. Lorsque les conditions a) et b) sont satisfaites, chacune des deux assertions précédentes implique l'autre, le morphisme ι lorsqu'il existe est unique, c'est un automorphisme du S-schéma G et l'on a $\iota^2 = \mathrm{id}_G$.

Pour que de plus le S-schéma en groupes (G,m) soit commutatif il faut et il suffit que l'on ait $m \circ \sigma = m$, où σ est l'automorphisme du S-schéma $G \times_S G$ qui permute les deux facteurs.

79

La section neutre de G est une immersion. C'est une immersion fermée si et seulement si le S-schéma G est séparé.

2.2. Foncteur des points d'un S-schéma en groupes

Soient S un schéma et G un S-schéma en groupes. La structure de groupe sur $\mathrm{G}(\mathrm{T})_{\mathrm{S}}$, où T est un S-schéma, est fonctorielle en T. Le foncteur h_{G} des points de G peut donc être vu comme un foncteur contravariant de la catégorie des S-schémas dans celle des groupes (commutatifs si le S-schéma en groupes G est commutatif).

Inversement, soit G un S-schéma. Supposons donnée, pour tout S-schéma T, une structure de groupe sur l'ensemble $\mathrm{G}(\mathrm{T})_{\mathrm{S}}$, fonctorielle en T. Cette donnée provient, d'après le lemme de Yoneda, d'une unique structure de S-schéma en groupes sur G (commutatif si les groupes $\mathrm{G}(\mathrm{T})_{\mathrm{S}}$ sont tous commutatifs).

Autrement dit, si un foncteur contravariant de la catégorie des S-schémas dans celle des groupes est, en tant que foncteur à valeurs dans la catégorie des ensembles, représenté par un S-schéma G, celui-ci est *ipso facto* muni d'une structure de S-schéma en groupes.

2.3. Schémas en groupes affines au-dessus de S

Soit G un S-schéma affine. Posons $\mathscr{A} = p_*(\mathscr{O}_{\mathrm{G}})$, où $p : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ est le morphisme structural. La donnée d'un morphisme de S-schémas $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ qui munit G d'une structure de S-schéma en groupes est équivalente à la donnée d'un homomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres : $\mathscr{A} \to \mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}$ qui munit $\mathscr{A}$ d'une structure de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre de Hopf commutative, et G est commutatif si et seulement si $\mathscr{A}$ est cocommutative.

2.4. Exemples

a) Le foncteur qui à tout S-schéma T associe le groupe additif des fonctions régulières sur T est représenté par le S-schéma en groupes affine commutatif $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$, appelé le *groupe additif* sur S, dont le S-schéma sous-jacent est $\mathbb{A}^1_{\mathrm{S}} = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[t])$ et dont la loi de composition est déduite du coproduit qui applique t sur $t \otimes 1 + 1 \otimes t$.

b) Le foncteur qui à tout S-schéma T associe le groupe multiplicatif des fonctions régulières inversibles sur T est représenté par le S-schéma en groupes affine commutatif $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$, appelé le *groupe multiplicatif* sur S, dont le S-schéma sous-jacent est $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[t,t^{-1}])$ et dont la loi de composition est déduite du coproduit qui applique t sur $t \otimes t$.

c) Soit n un entier $\geqslant 1$. Le foncteur qui à tout S-schéma T associe le groupe multiplicatif des fonctions régulières f sur T telles que $f^n = 1$ est représenté par le sous-S-schéma en groupes fermé $\mu_{n,\mathrm{S}} = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[t]/(t^n - 1))$ de $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$.

d) Soit X un S-schéma. Le foncteur $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})$ de la catégorie des S-schémas dans celle des groupes n'est pas toujours représentable. Il ne l'est pas même lorsque $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$ et que X est la droite affine sur $\mathbb{Q}$.

2.5. Homomorphismes

Soient G et H deux S-schémas en groupes, m_{G} et m_{H} leurs lois de composition. On dit qu'un morphisme de S-schémas $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est un *homomorphisme de* S*-schémas en groupes* si l'on a l'égalité $m_{\mathrm{H}} \circ (u \times u) = u \circ m_{\mathrm{G}}$. Cela équivaut à dire que, pour tout S-schéma T, l'application $\mathrm{G}(\mathrm{T})_{\mathrm{S}} \to \mathrm{H}(\mathrm{T})_{\mathrm{S}}$ déduite de u est un homomorphisme de groupes.

L'ensemble des homomorphismes de S-schémas en groupes de G dans H se note $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S\text{-}Gr}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$. C'est un sous-ensemble du groupe $\mathrm{H}(\mathrm{G})_{\mathrm{S}}$. Si H est commutatif, c'est un sous-groupe du groupe commutatif $\mathrm{H}(\mathrm{G})_{\mathrm{S}}$.

Soit $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un homomorphisme de S-schémas en groupes. Le foncteur $\mathrm{T} \mapsto \mathrm{Ker}(\mathrm{G}(\mathrm{T}) \to \mathrm{H}(\mathrm{T}))$ est représenté par un sous-S-schéma en groupes de G, noté $\mathrm{Ker}\, u$ et appelé *le noyau* de u. Plus précisément la première projection $\mathrm{G} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{S} \to \mathrm{G}$ (où le produit fibré est relatif à u et à la section neutre e_{H} de H) est une immersion qui induit un isomorphisme de S-schémas de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{S}$ sur $\mathrm{Ker}\, u$. Si le S-schéma H est séparé, cette immersion est fermée et $\mathrm{Ker}\, u$ est un sous-S-schéma fermé de G.

Si $\mathscr{P}$ est une propriété des morphismes de schémas stable par changement de base et que le morphisme de schémas $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ possède cette propriété, le morphisme de schémas $\mathrm{Ker}\, u \to \mathrm{S}$ la possède également, comme on le voit par le changement de base $e_{\mathrm{H}} : \mathrm{S} \to \mathrm{H}$.

2.6. Foncteurs d'homomorphismes

Soient G et H des S-schémas en groupes. Pour tout S-schéma T, notons F(T) l'ensemble des homomorphismes de T-schémas en groupes de G_{T} dans H_{T}. Pour tout morphisme $u : \mathrm{T}' \to \mathrm{T}$ de S-schémas, notons $\mathrm{F}(u) : \mathrm{F}(\mathrm{T}) \to \mathrm{F}(\mathrm{T}')$ l'application déduite du changement de base. On définit ainsi un foncteur contravariant F de la catégorie des S-schémas dans celle des ensembles, appelé *le foncteur des homomorphismes de* G *dans* H et noté $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S\text{-}Gr}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$. On définit de manière analogue le foncteur $\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{S\text{-}Gr}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ des isomorphismes de G dans H.

Soit T un S-schéma. Se donner un élément de F(T) équivaut à se donner un morphisme de S-schémas $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \to \mathrm{H}$, multiplicatif en la première variable. Par suite, dire que F est représentable signifie qu'il existe un S-schéma X muni d'un S-morphisme $\beta : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{H}$ multiplicatif par rapport à la première variable et possédant la propriété universelle suivante : pour tout S-schéma T et tout morphisme de S-schémas $b : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \to \mathrm{H}$, multiplicatif en la première variable, il existe un unique morphisme de S-schémas $u : \mathrm{T} \to \mathrm{X}$ tel que $b = \beta \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times u)$. Un tel couple (X, β), lorsqu'il existe, est unique à isomorphisme unique près : on appelle X le S*-schéma des homomorphismes de* G *dans* H et β le *morphisme universel de* $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ *dans* H.

Lorsque H est commutatif, les ensembles F(T) sont des groupes commutatifs et F est un foncteur contravariant de la catégorie des S-schémas dans celle des groupes commutatifs. S'il est représenté comme ci-dessus par un couple (X, β), X est muni d'une structure de S-schéma en groupes commutatif et $\beta : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{H}$ est bimultiplicatif.

81

Si dans l'alinéa précédent T est un S-schéma en groupes, alors b est bimultiplicatif si et seulement si u est un homomorphisme de S-schémas en groupes.

3. Schémas en groupes constants

3.1. Schémas constants

Soit M un ensemble. Le S-schéma somme d'une famille de copies de S indexée par M se note $\mathrm{M_S}$. Son morphisme structural est étale, surjectif si M est non vide, fini si M est fini. Un S-schéma est dit *constant* s'il est isomorphe à un S-schéma de la forme précédente, et *localement constant* si S admet un recouvrement par des ouverts au-dessus desquels il est constant.

Si $\mathrm{S'}$ est un S-schéma, le $\mathrm{S'}$-schéma $\mathrm{M_{S'}}$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{M_S \times_S S'}$, ce qui légitime la notation.

L'ensemble des points de $\mathrm{M_S}$ à valeurs dans un S-schéma T s'identifie à l'ensemble des partitions de T formées d'ensembles ouverts indexés par M, i.e. à l'ensemble des applications localement constantes de T dans M.

L'ensemble des S-morphismes de $\mathrm{M_S}$ dans T s'identifie à l'ensemble des applications de M dans l'ensemble $\Gamma(\mathrm{T/S})$ des sections du S-schéma T.

Soit N un second ensemble et soit $u : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application. On déduit de u un morphisme de S-schémas $u_\mathrm{S} : \mathrm{M_S} \to \mathrm{N_S}$. On définit ainsi un foncteur $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M_S}$ de la catégorie des ensembles dans celle des S-schémas. Ce foncteur commute au produit (et même aux limites projectives finies). Il est fidèle si S est non vide, pleinement fidèle si de plus S est connexe.

En effet l'ensemble $\mathrm{Hom_S(M_S, N_S)}$ s'identifie à l'ensemble des applications de $\mathrm{M \times S}$ dans N, localement constantes en la seconde variable, les morphismes de la forme u_S s'identifiant à celles qui sont constantes en la seconde variable.

3.2. Schémas en groupes constants

Soient M un groupe et m sa loi de composition. Alors m_S munit $\mathrm{M_S}$ d'une structure de S-schéma en groupes. Un S-schéma en groupes est dit *constant* s'il est isomorphe à un S-schéma en groupes de la forme précédente, et *localement constant* si S admet un recouvrement par des ouverts au-dessus desquels il est constant.

Le groupe des points de $\mathrm{M_S}$ à valeurs dans un S-schéma T s'identifie au groupe des applications localement constantes de T dans M.

Le foncteur $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M_S}$ de la catégorie des groupes dans celle des S-schémas en groupes est fidèle si S est non vide, pleinement fidèle si de plus S est connexe.

Soient M et N deux groupes. L'ensemble $\mathrm{Hom_{S\text{-}Gr}(M_S, N_S)}$ s'identifie à l'ensemble des applications de $\mathrm{M \times S}$ dans N, multiplicatives en la première variable et localement constantes en la seconde.

Supposons que le groupe M soit *de type fini.* Alors, d'après l'alinéa précédent, pour tout S-schéma T, $\mathrm{Hom_{T\text{-}Gr}(M_T, N_T)}$ s'identifie à l'ensemble des applications localement constantes de T dans l'ensemble $\mathrm{Hom_{Gr}(M, N)}$ des homomorphismes de groupes de M dans N. Il s'ensuit que le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S\text{-}Gr}}(\mathrm{M_S}, \mathrm{N_S})$ est représenté par le S-schéma constant $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})_{\mathrm{S}}$.

4. Caractères

4.1. Foncteur des caractères d'un S-schéma en groupes

Soit G un S-schéma en groupes. On appelle *caractère de* G un homomorphisme de S-schémas en groupes de G dans le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{\mathrm{m,S}}$ sur S (§ 2.4). Ces caractères forment un groupe commutatif, appelé le *groupe des caractères de* G.

Lorsque le S-schéma en groupes G est affine et que $\mathscr{A}$ désigne la $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre de Hopf correspondante, la donnée d'un caractère de G équivaut à la donnée d'un homomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-bigèbres de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[t, t^{-1}]$ dans $\mathscr{A}$, ou ce qui revient au même à la donnée d'une section inversible f de $\mathscr{A}$ telle que $c(f) = f \otimes f$, où c désigne le coproduit de $\mathscr{A}$.

Le foncteur des homomorphismes de G dans $\mathbb{G}_{\mathrm{m,S}}$ s'appelle le *foncteur des caractères de* G. C'est un foncteur contravariant de la catégorie des S-schémas dans celle des groupes commutatifs. Il associe à un S-schéma T le groupe des caractères de $\mathrm{G_T}$.

S'il est représentable, on note $\widehat{\mathrm{G}}$ un S-schéma en groupes commutatif qui le représente et $\beta_{\mathrm{G}} : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \widehat{\mathrm{G}} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m,S}}$ le S-morphisme bimultiplicatif universel (§ 2.6). On appelle $\widehat{\mathrm{G}}$ le S-*schéma en groupes des caractères de* G (ou encore le S-*schéma en groupes dual de* G lorsque G est commutatif) et β_{G} *l'accouplement universel* entre G et $\widehat{\mathrm{G}}$.

Supposons ces conditions réalisées. Alors, pour tout S-schéma T, $\widehat{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}}$ est le T-schéma en groupes des caractères de $\mathrm{G_T}$ et l'accouplement universel entre $\mathrm{G_T}$ et $\widehat{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}}$ se déduit de β_{G} par changement de base.

Soit $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un homomorphisme de S-schémas en groupes. On déduit de u un homomorphisme du foncteur des caractères de H dans le foncteur des caractères de G. Si ces deux foncteurs sont représentables, par $(\widehat{\mathrm{G}}, \beta_{\mathrm{G}})$ et $(\widehat{\mathrm{H}}, \beta_{\mathrm{H}})$ respectivement, on déduit de l'homomorphisme précédent un homomorphisme de S-schémas en groupes $\widehat{u} : \widehat{\mathrm{H}} \to \widehat{\mathrm{G}}$ caractérisé par la propriété suivante : $\widehat{u}$ est l'adjoint à droite de u relativement aux accouplements β_{G} et β_{H}.

4.2. Bidualité

Soit G un S-schéma en groupes dont le foncteur des caractères est représentable. On déduit de l'accouplement universel $\beta_{\mathrm{G}} : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \widehat{\mathrm{G}} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m,S}}$ un homomorphisme canonique du foncteur en groupes h_{G} dans le foncteur des caractères de $\widehat{\mathrm{G}}$. Si c'est un isomorphisme, on dit que G est *réflexif* : cela implique que G est commutatif, qu'il s'identifie à $\widehat{\widehat{\mathrm{G}}}$ (l'accouplement universel $\beta_{\widehat{\mathrm{G}}}$ se déduisant de β_{G} par permutation des facteurs G et $\widehat{\mathrm{G}}$) et que $\widehat{\mathrm{G}}$ est réflexif.

Le foncteur contravariant $\mathrm{G} \mapsto \widehat{\mathrm{G}}$ est une anti-équivalence de la catégorie des S-schémas en groupes réflexifs dans elle-même.

83

5. Schémas en groupes diagonalisables

5.1. Définition

Soit M un groupe commutatif. La $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{M}]$ de ce groupe, munie du coproduit qui applique m sur $m \otimes m$ pour tout $m \in \mathrm{M}$, est une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre de Hopf quasi-cohérente, commutative et cocommutative. On note $\mathrm{D}(\mathrm{M})_{\mathrm{S}}$ le S-schéma en groupes affine commutatif $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{M}])$ correspondant.

Les sections de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{M}]$ sur un ouvert U de S sont les combinaisons linéaires formelles $\sum a_m m$, où $(a_m)_{m\in\mathrm{M}}$ est une famille de sections de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ sur U, localement dans U à support fini dans M.

Le schéma en groupes $\mathrm{D}(\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}$ s'identifie à $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ (en identifiant $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathbb{Z}]$ à $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[t, t^{-1}]$ par l'isomorphisme qui applique $n \in \mathbb{Z}$ sur t^n) ; de même $\mathrm{D}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}$ s'identifie à $\mu_{n,\mathrm{S}}$.

Soit N un second groupe commutatif. Le schéma en groupes $\mathrm{D}(\mathrm{M} \times \mathrm{N})_{\mathrm{S}}$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{D}(\mathrm{M})_{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{D}(\mathrm{N})_{\mathrm{S}}$. Si S' est un S-schéma, le S'-schéma en groupes $\mathrm{D}(\mathrm{M})_{\mathrm{S}'}$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{D}(\mathrm{M})_{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, ce qui légitime la notation.

Soit $u : \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ un homomorphisme de groupes commutatifs. L'homomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{N}] \to \mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{M}]$ qui le prolonge est compatible aux coproduits, donc définit un homomorphisme de S-schémas en groupes $\mathrm{D}(u) : \mathrm{D}(\mathrm{M})_{\mathrm{S}} \to \mathrm{D}(\mathrm{N})_{\mathrm{S}}$. Ce dernier est affine (et donc quasi-compact), puisque $\mathrm{D}(\mathrm{M})_{\mathrm{S}}$ et $\mathrm{D}(\mathrm{N})_{\mathrm{S}}$ sont des S-schémas affines.

Exemple. – Soit m un élément de M et soit $u : \mathbb{Z} \to \mathrm{M}$ l'homomorphisme de groupes qui applique 1 sur m. Alors $\mathrm{D}(u)$ s'identifie à un caractère $\chi_m : \mathrm{D}(\mathrm{M})_{\mathrm{S}} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathrm{S}}$, qui est dit *associé à m*.

Un S-schéma en groupes G est dit *diagonalisable* s'il est isomorphe à un S-schéma de la forme $\mathrm{D}(\mathrm{M})_{\mathrm{S}}$, *localement diagonalisable* s'il existe un recouvrement de S par des ouverts au-dessus desquels G est diagonalisable ; cela implique que G est affine sur S et commutatif.

5.2. Dualité entre M_{S} et $\mathrm{D}(\mathrm{M})_{\mathrm{S}}$

Soient T un S-schéma et p son morphisme structural. Se donner un S-morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{D}(\mathrm{M})_{\mathrm{S}}$ revient à se donner un homomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{M}] \to p_*(\mathscr{O}_{\mathrm{T}})$, ou encore un homomorphisme de groupes de M dans le groupe multiplicatif des fonctions régulières inversibles sur T, groupe qui s'identifie à celui des sections du T-schéma $\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathrm{T}}$. Or la donnée d'un tel homomorphisme équivaut à la donnée d'un homomorphisme de T-schémas en groupes $\mathrm{M}_{\mathrm{T}} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathrm{T}}$.

Ainsi, $\mathrm{D}(\mathrm{M})_{\mathrm{S}}$ représente le foncteur des caractères de M_{S}. L'accouplement universel

$$\beta : \mathrm{M}_{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{D}(\mathrm{M})_{\mathrm{S}} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$$

se décrit explicitement comme suit : le S-schéma $\mathrm{M}_{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{D}(\mathrm{M})_{\mathrm{S}}$ est la somme d'une famille indexée par M de copies de $\mathrm{D}(\mathrm{M})_{\mathrm{S}}$, et la restriction de β à la copie d'indice m est le caractère χ_m associé à m.

Démontrons que M_S est réflexif, ce qui impliquera que $D(M)_S$ l'est aussi et que chacun s'identifie au dual de l'autre.

Il s'agit de démontrer que, pour tout S-schéma T, l'homomorphisme de groupes

$$\alpha : M_S(T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{T\text{-}Gr}(D(M)_T, \mathbb{G}_{m,T})$$

déduit de β est bijectif.

Or, se donner un caractère h de $D(M)_T$ équivaut d'après § 4.1 à se donner une section inversible f de $\mathscr{O}_T[M]$ telle que $c(f) = f \otimes f$. Si l'on écrit $f = \sum_{m\in M} a_m m$, la relation $c(f) = f \otimes f$ se traduit par les relations $a_m a_{m'} = 0$ si $m \neq m'$ et $a_m^2 = a_m$. Il en résulte que a_m est égale à 1 dans un ensemble ouvert et fermé U_m de T et à 0 dans son complémentaire, et que les U_m sont deux à deux disjoints. Leur réunion est T puisque f est inversible. La donnée de f est donc équivalente à la donnée d'une application localement constante de T dans M, i.e. d'un élément de $M_S(T)$. On vérifie que la bijection ainsi définie de $M_S(T)$ sur $\mathrm{Hom}_{T\text{-}Gr}(D(M)_T, \mathbb{G}_{m,T})$ n'est autre que α.

Le foncteur $G \mapsto \widehat{G}$ définit donc des anti-équivalences inverses l'une de l'autre (à équivalence naturelle près) entre la catégorie des S-schémas en groupes constants et celle des S-schémas en groupes diagonalisables, et entre celle des S-schémas en groupes localement constants et celle des S-schémas en groupes localement diagonalisables (eux aussi réflexifs).

Soient M et N des groupes commutatifs. Supposons M *de type fini*. Le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-}Gr}(D(N)_S, D(M)_S)$ est isomorphe au foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-}Gr}(M_S, N_S)$, donc est représenté par le S-schéma en groupes constant $\mathrm{Hom}_{Gr}(M, N)_S$: tout homomorphisme de S-schémas en groupes $D(N)_S \to D(M)_S$ est donc, localement pour la topologie de Zariski, de la forme $D(u)$.

Il s'ensuit que, si G et H sont deux S-schémas en groupes localement diagonalisables et que le S-schéma H est de type fini, le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-}Gr}(G, H)$ est représentable par un S-schéma en groupes localement constant.

5.3. Propriétés d'exactitude

Soient M un groupe commutatif, M′ un sous-groupe de M et M″ le quotient M/M′.

a) L'homomorphisme $D(M'')_S \to D(M)_S$ déduit de la surjection canonique $M \to M''$ est une immersion fermée : $D(M'')_S$ s'identifie ainsi à un sous-S-schéma en groupes fermé de $D(M)_S$.

b) L'homomorphisme $D(M)_S \to D(M')_S$ déduit de l'injection canonique $M' \to M$ est fidèlement plat (et quasi-compact car affine). Son noyau est $D(M'')_S$.

c) $D(M')_S$ s'identifie au quotient de $D(M)_S$ par $D(M'')_S$ en tant que faisceau abélien *fpqc*, et *a fortiori* en tant que S-schéma en groupes.

L'assertion a) résulte de ce que l'homomorphisme $\mathscr{O}_S[M] \to \mathscr{O}_S[M'']$ est surjectif. La première assertion de b) résulte de ce que le $\mathscr{O}_S[M']$-module $\mathscr{O}_S[M]$ est libre de rang $\geqslant 1$, donc fidèlement plat. L'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_S[M] \otimes_{\mathscr{O}_S[M']} \mathscr{O}_S \to \mathscr{O}_S[M'']$ (où $\mathscr{O}_S$ est un $\mathscr{O}_S[M']$-module par la coünité) est un isomorphisme, d'où la seconde assertion de b). Enfin, c) est une conséquence formelle de b).

Soit $u : M \to N$ un homomorphisme de groupes commutatifs. Notons v l'homomorphisme de S-schémas en groupes $D(u) : D(N)_S \to D(M)_S$. Alors :

85

a) le noyau de v est $\mathrm{D}(\mathrm{Coker}\, u)_{\mathrm{S}}$;

b) $\mathrm{D}(\mathrm{Im}\, u)_{\mathrm{S}}$ est un sous-schéma en groupes fermé de $\mathrm{D}(\mathrm{M})_{\mathrm{S}}$ et est l'image de v en tant que faisceau abélien *fpqc* ;

c) $\mathrm{D}(\mathrm{Ker}\, u)_{\mathrm{S}}$ est le conoyau de v en tant que faisceau abélien *fpqc*.

Ces assertions se déduisent aussitôt des assertions a), b), c) précédentes, appliquées aux suites exactes courtes $0 \to \mathrm{Ker}\, u \to \mathrm{M} \to \mathrm{Im}\, u \to 0$ et $0 \to \mathrm{Im}\, u \to \mathrm{N} \to \mathrm{Coker}\, u \to 0$.

Exemple. – Le noyau de l'endomorphisme de $\mathrm{D}(\mathrm{M})_{\mathrm{S}}$ de multiplication par un entier $n \geqslant 1$ s'identifie à $\mathrm{D}(\mathrm{M}/n\mathrm{M})_{\mathrm{S}}$.

5.4. Sous-schémas en groupes des schémas en groupes diagonalisables

Soient k un corps et G un schéma en groupes affine sur k. Notons A la k-algèbre de Hopf correspondante, c le coproduit de A et M le groupe multiplicatif des éléments inversibles m de A tels que $c(m) = m \otimes m$. Les éléments de M sont linéairement indépendants sur k. Ils engendrent le k-espace vectoriel A si et seulement si G est diagonalisable.

Soit L une partie libre sur k maximale dans M. Tout élément m de M peut s'écrire comme une combinaison k-linéaire $\sum_{\ell \in \mathrm{L}} a_\ell \ell$. La relation $c(m) = m \otimes m$ implique que l'on a $a_\ell^2 = a_\ell$ pour tout $\ell \in \mathrm{L}$ et $a_\ell a_{\ell'} = 0$ si ℓ et ℓ' sont deux éléments distincts de L. Il s'ensuit que tous les a_ℓ sont nuls, sauf un qui est égal à 1. Cela prouve que l'on a M = L, d'où la première assertion. La seconde en résulte aussitôt.

Soient k un corps et M un groupe commutatif. Tout sous-k-schéma en groupes de $\mathrm{D}(\mathrm{M})_k$ est de la forme $\mathrm{D}(\mathrm{M}/\mathrm{N})_k$, où N est un sous-groupe de M.

Tout sous-k-schéma en groupes d'un k-schéma en groupes est fermé ([**2**, t. I, exposé VI_{A}, cor. 0.5.2]). Tout sous-k-schéma en groupes H de $\mathrm{G} = \mathrm{D}(\mathrm{M})_k$ est donc un k-schéma en groupes affine, dont l'algèbre de Hopf A est un quotient de l'algèbre de Hopf $k[\mathrm{M}]$. Pour tout $m \in \mathrm{M}$, notons $\overline{m}$ l'image de m dans A par la surjection canonique ; c'est un élément inversible de A dont le coproduit est $\overline{m} \otimes \overline{m}$. Ces éléments engendrent le k-espace vectoriel A. Notre assertion résulte donc du premier alinéa, en prenant pour N le noyau de l'homomorphisme de groupes $m \mapsto \overline{m}$ de M dans $\mathrm{A}^\times$.

*Ce résultat se généralise comme suit. Soit M un groupe commutatif de type fini et soit H un sous-S-schéma en groupes fermé de $\mathrm{D}(\mathrm{M})_{\mathrm{S}}$, plat et de présentation finie sur S. Il existe une unique partition $(\mathrm{U}_{\mathrm{N}})$ de S en sous-ensembles ouverts et fermés, indexée par l'ensemble des sous-groupes N de M, telle que $\mathrm{H}_{\mathrm{U}_{\mathrm{N}}} = \mathrm{D}(\mathrm{M}/\mathrm{N})_{\mathrm{U}_{\mathrm{N}}}$ pour tout N : cela résulte des remarques 3) et 4) du § 6.5. $_*$

Aucune des trois hypothèses faites sur H ne peut être omise. En effet :

a) Prenons pour S le spectre premier d'un anneau de valuation discrète A dans lequel 2 est inversible et pour G le S-schéma en groupes $\mu_{2,\mathrm{S}}$, isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}$. Le complémentaire du point non neutre de la fibre spéciale de G est un sous-S-schéma en groupes ouvert de G, plat et de présentation finie sur S, mais non diagonalisable. Le sous-S-schéma réduit de G, complémentaire du point non neutre de la fibre générique de G, est un sous-S-schéma en groupes fermé de G, de présentation finie sur S, mais non diagonalisable.

b) Prenons pour S le spectre premier de l'anneau $k^{\mathbb{N}}$, où k est un corps, et pour G le S-schéma en groupe $\mu_{2,\mathrm{S}} = \mathrm{Spec}(k^{\mathbb{N}}[t]/(t^2-1)k^{\mathbb{N}}[t])$. L'image dans $k^{\mathbb{N}}[t]/(t^2-1)k^{\mathbb{N}}[t]$ de l'idéal $(t-1)k^{(\mathbb{N})}[t]$ de $k^{\mathbb{N}}[t]$ définit un sous-S-schéma en groupes fermé de G, plat sur S, mais non localement diagonalisable.

II. SCHÉMAS EN GROUPES DE TYPE MULTIPLICATIF

6. Schémas en groupes de type multiplicatif

6.1. Définition

Soit G un S-schéma en groupes. On dit que G est *de type multiplicatif* s'il est localement diagonalisable pour la topologie *fpqc*.

Cela signifie par définition que pour tout $s \in \mathrm{S}$, il existe un voisinage ouvert affine U de s dans S et une famille finie $(\mathrm{S}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de schémas affines munis de morphismes plats $f_i : \mathrm{S}_i \to \mathrm{U}$ tels que les $f_i(\mathrm{S}_i)$ recouvrent U et que les S_i-schémas en groupes $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_i$ soient diagonalisables.

Nous verrons au § 6.2 que l'ouvert U et la famille $(\mathrm{S}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ peuvent être choisis de telle sorte que l'ensemble d'indices I soit réduit à un élément.

Soit T un S-schéma. Si le S-schéma en groupes G est de type multiplicatif, il en est de même du T-schéma en groupes G_{T}. La réciproque est vraie si le morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est fidèlement plat et quasi-compact.

6.2. Type des fibres

Soit G un S-schéma en groupes de type multiplicatif.

Soit $s \in \mathrm{S}$. Notons G_s la fibre de G en s. Il existe une extension k du corps résiduel de s au-dessus de laquelle G_s est diagonalisable, i.e. isomorphe à $\mathrm{D(M)}_k$, où M est un groupe commutatif. La classe d'isomorphisme de M ne dépend pas du choix de k. On l'appelle le *type* de G en s.

L'application qui à $s \in \mathrm{S}$ associe le type de G en s est localement constante.

En effet, soit $s \in \mathrm{S}$. Notons M le type de G en s. Choisissons U et les $f_i : \mathrm{S}_i \to \mathrm{U}$ pour $i \in \mathrm{I}$ comme au § 6.1. Notons T le schéma somme des S_i. Le morphisme $f : \mathrm{T} \to \mathrm{U}$ déduit des f_i est fidèlement plat et quasi-compact ; cela implique que f est surjectif et que la topologie de U s'identifie à la topologie quotient de celle de T. Soit U' l'ensemble des points $x \in \mathrm{U}$ tels que le type de G en x soit M. Son image réciproque $f^{-1}(\mathrm{U}')$ est l'ensemble des $t \in \mathrm{T}$ tels que le type de G_{T} en t soit M. Il est réunion d'une sous-famille $(\mathrm{S}_i)_{i\in\mathrm{J}}$ de $(\mathrm{S}_i)_{i\in\mathrm{I}}$, donc est ouvert et fermé dans T. Par suite, U' est ouvert et fermé dans U, d'où notre assertion.

Cela prouve également notre affirmation du § 6.1 : U' est un voisinage ouvert affine de s, $\mathrm{S}' = f^{-1}(\mathrm{U}')$ est un schéma affine, le morphisme de S' dans U' induit par f est plat et surjectif, et le S'-schéma en groupes $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ est isomorphe à $\mathrm{D}_{\mathrm{S}'}(\mathrm{M})$, donc diagonalisable.

Lorsque le type de G en tout point de S est M, on dit que G *est de type* M. Il existe une partition canonique de S en sous-ensembles ouverts et fermés au-dessus de chacun desquels G a un type, ces types étant deux à deux distincts. On l'appelle la *partition par le type*.

6.3. Tores

Soit G un S-schéma en groupes. On dit que G est *un tore* si, localement pour la topologie *fpqc*, il est isomorphe à $\mathbb{G}_m^r$ pour un entier $r \in \mathbb{N}$ (variable). Cela équivaut à dire que G est de type multiplicatif et que son type en chaque point est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini.

6.4. Quelques propriétés des schémas en groupes de type multiplicatif

Soit G un S-schéma en groupes de type multiplicatif. Il est fidèlement plat et affine sur S, et les conditions suivantes sont respectivement équivalentes :

Le S-schéma G est :	Le type de G en tout point $s \in S$ est un groupe commutatif :
— de type fini	— de type fini
— de présentation finie	— de type fini
— fini	— fini
— entier	— de torsion
— lisse	— de type fini, et sans p-torsion si la caractéristique p de $k(s)$ est non nulle.
— isomorphe à S	— réduit à 0

Les propriétés de G considérées sont toutes de nature locale sur la base pour la topologie *fpqc*. Il suffit donc de démontrer ces énoncés lorsque $S = \mathrm{Spec}(A)$ est un schéma affine et G est diagonalisable, i.e. de la forme $\mathrm{Spec}(A[M])$, où M est un groupe commutatif. Mais dans ce cas ils sont élémentaires.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, le noyau ${}_nG$ de la multiplication par n est de type multiplicatif. Il est entier sur S, et fini sur S lorsque le S-schéma G est de type fini.

On se ramène comme précédemment au cas où G est diagonalisable. Cela résulte alors du fait que le noyau de la multiplication par n dans $D(M)_S$ est $D(M/nM)_S$, que M/nM est un groupe de torsion, et est fini si M est de type fini.

6.5. Homomorphismes

Rappelons que, comme les S-schémas en groupes de type multiplicatif sont affines, tout homomorphisme entre eux est affine, et donc quasi-compact.

Soit $u : H \to G$ un homomorphisme de S-schémas en groupes de type multiplicatif, *avec* G *de type fini sur* S. Alors :

a) Le noyau de u est un sous-S-schéma en groupes fermé de H de type multiplicatif.

b) Il existe un S-schéma en groupes $\mathrm{Im}\, u$ de type multiplicatif tel que u soit le composé d'un homomorphisme fidèlement plat $H \to \mathrm{Im}\, u$ et d'un homomorphisme $\mathrm{Im}\, u \to G$ qui est une immersion fermée.

c) Il existe un S-schéma en groupes de type multiplicatif $\mathrm{Coker}\, u$ et un homomorphisme fidèlement plat $G \to \mathrm{Coker}\, u$ de noyau $\mathrm{Im}\, u$.

Ces assertions déterminent $\mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Coker}\, u$ de manière unique à isomorphisme unique près : en effet, vu comme faisceau *fpqc*, $\mathrm{Im} u$ est alors le quotient de H par

$\operatorname{Ker} u$, i.e. l'image de u, et $\operatorname{Coker} u$ le quotient de G par $\operatorname{Im} u$, i.e. le conoyau de u. En outre :

d) $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Coker} u$ sont de type fini sur S, et il en est de même de $\operatorname{Ker} u$ si H l'est.

Compte tenu de la propriété d'unicité, les énoncés à démontrer sont de nature locale pour la topologie de Zariski. On peut donc supposer que S est affine et qu'il existe un schéma affine S' et un morphisme fidèlement plat $S' \to S$ tels que $G_{S'}$ et $H_{S'}$ soient diagonalisables, i.e. de la forme $D(M)_{S'}$ et $D(N)_{S'}$, avec M de type fini. Le morphisme $u_{S'}$ est alors localement pour la topologie de Zariski sur S' de la forme $D(v)$, où v est un homomorphisme de M dans N. Les assertions a) à d) pour $u_{S'}$ résultent donc du § 5.3. Les S'-schémas $\operatorname{Im}(u_{S'})$ et $\operatorname{Coker}(u_{S'})$ sont alors, en vertu des propriétés d'unicité, munis de données de descente et puisqu'ils sont affines, proviennent par changement de base de S-schémas en groupes affines $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Coker} u$, munis d'homomorphismes $H \to \operatorname{Im} u$, $\operatorname{Im} u \to G$ et $G \to \operatorname{Coker} u$ satisfaisant a) à d).

Il résulte de ce qui précède que la catégorie des S-schémas en groupes de type fini de type multiplicatif est une catégorie abélienne.

Remarques. – 1) Il résulte des propriétés d'unicité ci-dessus que, sous les hypothèses précédentes, la formation du noyau, de l'image et du conoyau de u commute à tout changement de base : par suite, l'ensemble U des points $s \in S$ tels que $\operatorname{Ker} u_s = 0$ (resp. $u_s = 0$; resp. $\operatorname{Coker} u_s = 0$) est ouvert et fermé dans S et l'on a $\operatorname{Ker} u_U = 0$ (resp. $u_U = 0$; resp. $\operatorname{Coker} u_U = 0$).

2) Soient H et H' des sous-S-schémas en groupes de type multiplicatif d'un S-schéma en groupes G de type multiplicatif et de type fini. Alors $H \cap H'$ (intersection schématique = intersection fonctorielle) est un sous S-schéma en groupes de type multiplicatif de G. L'ensemble U des $s \in S$ tels que $H_s \subset H'_s$ (resp. $H_s = H'_s$) est ouvert et fermé dans S et l'on a $H_U \subset H'_U$ (resp. $H_U = H'_U$).

En effet $H \cap H'$ est le noyau de l'homomorphisme canonique $u : H \to G/H'$, et l'on a $H_s \subset H'_s$ si et seulement si $u_s = 0$, et $H_U \subset H'_U$ si et seulement si $u_U = 0$.

3) Soit G un S-schéma en groupes diagonalisable de type fini et soit H un sous-S-schéma en groupes de type multiplicatif de G. Il existe une partition de S formée de parties ouvertes et fermées au-dessus desquelles H et G/H sont diagonalisables. En particulier, H et G/H sont diagonalisables si S est connexe.

Plus précisément, si $G = D(M)_S$, alors pour tout sous-groupe N de M, l'ensemble U_N des $s \in S$ tels que $H_s = D(M/N)_s$ est ouvert et fermé dans S d'après la remarque 2, H_{U_N} est isomorphe à $D(M/N)_{U_N}$ et $(G/H)_{U_N}$ à $D(N)_{U_N}$; les ouverts U_N ainsi construits sont deux à deux disjoints et recouvrent S en vertu du deuxième alinéa du § 5.4.

4) Soient k un corps et G un k-schéma en groupes de type multiplicatif. Tout sous-k-schéma en groupes de G est de type multiplicatif. Cela résulte de *loc. cit.*

*Plus généralement, soit G un S-schéma en groupes de type multiplicatif, de type fini sur S. Tout sous-S-schéma en groupes fermé H de G, plat et de présentation finie sur S, est de type multiplicatif : cela résulte du cor. 4.8 de [**1**], t. II, exposé X, dont la condition b) est satisfaite par H. $_*$

7. Classification des schémas en groupes de type multiplicatif

7.1. Diverses notions de trivialité

Soit G un S-schéma en groupes de type multiplicatif. On dit que G est *trivial*, ou *déployé*, s'il est diagonalisable. On dit que G est *localement trivial* s'il est *localement diagonalisable*, c'est-à-dire s'il existe un recouvrement de S par des ouverts au-dessus desquels G est diagonalisable.

89

On dit que G est *déployé par un* S*-schéma* S′ si le S′-schéma en groupes $G_{S'}$ est diagonalisable. On dit que G est *isotrivial* s'il est déployé par un revêtement étale (= morphisme étale et fini) surjectif $S' \to S$. Lorsque S est connexe, on peut choisir ce revêtement connexe, et même galoisien.

On dit que G est *localement isotrivial* s'il existe un recouvrement de S par des ouverts au-dessus desquels G est isotrivial.

On dit que G est *quasi-isotrivial* s'il est localement diagonalisable pour la topologie étale. Cela équivaut à dire qu'il existe un recouvrement ouvert $\mathscr{U}$ de S et pour tout $U \in \mathscr{U}$ un morphisme étale surjectif $U' \to U$ tel que G soit déployé par U′.

On a à ce sujet les résultats suivants :

a) *Tout S-schéma en groupes *de type fini* de type multiplicatif est quasi-isotrivial ([**1**, t. II, exposé X, cor. 4.5]).*

b) Un S-schéma en groupes *fini* de type multiplicatif dont les fibres ont toutes un même type est isotrivial : voir § 7.2.

c) Tout schéma en groupes de type fini de type multiplicatif sur un corps est isotrivial : voir § 7.3. *Le même énoncé est vrai plus généralement sur tout anneau local hensélien ([**1**, t. II, exposé X, cor. 4.6])*

d) Soit S un schéma connexe et soit $\underline{s}$ un point géométrique de S (i.e. un point de S à valeurs dans un corps séparablement clos). La catégorie des schémas en groupes de type multiplicatif isotriviaux sur S est anti-équivalente à celle des groupes commutatifs M, munis d'une opération à gauche de $\pi_1(S, \underline{s})$, de noyau ouvert : voir § 7.4.

Il existe des S-schémas en groupes de type multiplicatif de type fini (donc quasi-isotriviaux) qui ne sont pas localement isotriviaux : c'est le cas si k est un corps, que l'on prend pour S la courbe obtenue en recollant les points 0 et 1 de la droite affine $\mathbb{A}^1_k$, et pour G le S-schéma en groupes obtenu en recollant les fibres en 0 et 1 du tore trivial $\mathbb{G}_m^2 = D(\mathbb{Z}^2)$ sur $\mathbb{A}^1_k$ suivant l'isomorphisme $D\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Il existe aussi des schémas en groupes de type fini de type multiplicatif localement triviaux sur une base S connexe, qui ne sont pas isotriviaux : c'est le cas si l'on prend pour S la courbe obtenue en recollant deux copies de $\mathbb{A}^1_k$ en leurs points 0 d'une part, 1 d'autre part, et pour G le S-schéma en groupes obtenu en recollant deux copies du tore trivial $\mathbb{G}_m^2 = D(\mathbb{Z}^2)$ sur $\mathbb{A}^1_k$ suivant l'identité sur leurs fibres en 0 et suivant $D\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ sur leurs fibres en 1.

On voit que ces exemples sont liés à l'existence de deux « branches » aux points recollés. *Si par contre S est un schéma connexe localement nœthérien *normal*, ou plus généralement *géométriquement unibranche* (ce qui signifie que le normalisé $\widetilde{S}$ de $S_{\text{réd}}$ possède au-dessus de chaque point s de S un unique point $\widetilde{s}$, et que le corps résiduel de $\widetilde{s}$ est radiciel sur celui de s), alors tout S-schéma en groupes de type fini de type multiplicatif est isotrivial ([**1**, t. II, exposé X, rem. 5.15 et th. 5.16]), et est trivial s'il est localement trivial.*

7.2. Schémas en groupes de type multiplicatif finis

Soient G et H deux S-schémas en groupes de type multiplicatif. S'ils sont finis sur S, le foncteur $\underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-}\mathrm{Gr}}(G, H)$ est représentable par un S-schéma étale et fini.

La question est de nature locale sur S. Nous pouvons donc supposer que S est affine et qu'il existe un S-schéma affine S′ fidèlement plat sur S qui déploie G et H. Alors $\underline{\mathrm{Isom}}_{S'\text{-}\mathrm{Gr}}(G_{S'}, H_{S'})$ est représentable par un S′-schéma constant fini X′ (§ 5.2). Celui-ci est muni d'une donnée de descente, qui est effective puisque X' est affine. Il se descend en un schéma X sur S qui représente $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-Gr}}(G, H)$. Comme X' est fini et étale sur S', il en est de même de X sur S.

Soit G un S-schéma en groupes *fini* de type multiplicatif dont toutes les fibres ont un même type M. Alors G est isotrivial.

Notons X le S-schéma fini et étale représentant le foncteur $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-Gr}}(G, D(M)_S)$. Par définition, G_X est isomorphe à $D(M)_X$. Le fait que G soit de type M en chaque point implique que le morphisme $X \to S$ est surjectif, d'où le résultat.

7.3. Schémas en groupes de type multiplicatif sur un corps

Tout schéma en groupes de type fini de type multiplicatif sur un corps est isotrivial.

Soit G un tel schéma en groupes sur un corps k. Par hypothèse, G est déployé par une k-algèbre A non nulle. Étant de présentation finie, il est déjà déployé par une sous-algèbre A' de A, de type fini sur k, et *a fortiori* par tout corps résiduel de A'. Il est donc déployé par une extension k' de degré fini de k. Mais alors, il est déjà déployé par la fermeture séparable de k dans k' (voir § 13), donc est isotrivial.

7.4. Classification dans le cas isotrivial

Soit S un schéma connexe. Ainsi que nous l'avons dit, tout S-schéma en groupes de type multiplicatif isotrivial est déployé par un revêtement galoisien S' de S. Notons Γ son groupe d'automorphismes ; il est fini et S' est un torseur à gauche sous Γ au-dessus de S : plus précisément, le morphisme de schémas $\Gamma_{S'} \to S' \times_S S'$ dont la restriction à la copie d'indice h de S' est $(\mathrm{id}_{S'}, h)$, est un isomorphisme de S'-schémas Γ-équivariant (lorsque $S' \times_S S'$ est muni de la projection sur le premier facteur et de l'opération de Γ sur le second facteur).

Soit G' un S'-schéma en groupes. Pour $h \in \Gamma$, appelons h-homomorphisme de G' dans G' un morphisme de schémas $v : G' \to G'$ tel que $p \circ v = h \circ p$ et $m \circ (v \times v) = v \circ m$, où $p : G' \to S'$ est le morphisme structural et m la loi de composition de G'. Il résulte de l'alinéa précédent qu'une donnée de descente de S' à S sur G' équivaut à la donnée, pour tout $h \in \Gamma$ d'un h-homomorphisme $v_h : G' \to G'$ tel que $v_{h' \circ h} = v_{h'} \circ v_h$ pour $h, h' \in \Gamma$ et $v_1 = \mathrm{id}_{G'}$.

Lorsque G' est un S'-schéma en groupes diagonalisable $D(M)_{S'}$, tout h-homomorphisme v_h est de la forme $(\mathrm{id}_{D(M)_S} \times h) \circ w_h$, où w_h est un endomorphisme du S'-schéma en groupes $D(M)_{S'}$. Comme S' est connexe, on a $w_h = D(u_h)$, où u_h est un endomorphisme du groupe M, et les relations satisfaites par les v_h se traduisent par les relations $u_{h' \circ h} = u_h \circ u_{h'}$ et $u_1 = \mathrm{id}_M$, qui expriment que $h \mapsto u_h$ est une opération à droite de Γ sur M.

La catégorie des S-schémas en groupes de type multiplicatif déployés par S' est équivalente à celle des S'-schémas en groupes diagonalisables, munis d'une donnée de descente, et donc d'après ce qui précède à la catégorie des Γ-modules à droite.

Plus précisément, l'équivalence de catégories précédente associe à un S-schéma en groupes de type multiplicatif G déployé par S' le groupe M des caractères du S'-schéma en groupes $G_{S'} = G \times_S S'$, muni de l'opération à droite de Γ suivante : si $\chi \in \mathrm{M}$ et $h \in \Gamma$, $\chi \cdot h$ est le caractère de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ obtenu en composant les S-morphismes

$$\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times h} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' \xrightarrow{\chi} \mathbb{G}_{\mathrm{m,S}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{G}_{\mathrm{m,S}}} \times h^{-1}} \mathbb{G}_{\mathrm{m,S}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'.$$

Soit $\underline{s}$ un point géométrique de S. On déduit de ce qui précède, par passage à la limite inductive, une équivalence de la catégorie des S-schémas en groupes de type multiplicatif isotriviaux dans celle des groupes commutatifs munis d'une opération à gauche de $\pi_1(\mathrm{S}, \underline{s})$ de noyau ouvert.

Plus précisément, cette équivalence de catégories peut se définir comme suit. À un S-schéma en groupes de type multiplicatif G isotrivial, on associe le groupe M des caractères du groupe diagonalisable $\mathrm{G}_{\underline{s}}$. Si S' est un revêtement étale surjectif de S qui déploie G, choisissons un S-schéma en groupes H diagonalisable et un isomorphisme de S'-schémas en groupes $u : \mathrm{G}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$. Comme les fibres géométriques de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ et $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$ en un point géométrique $\underline{s'}$ de S' au-dessus de $\underline{s}$ sont canoniquement isomorphes à $\mathrm{G}_{\underline{s}}$ et $\mathrm{H}_{\underline{s}}$, à chacun de ces points $\underline{s'}$ est donc associé un isomorphisme $u_{\underline{s'}} : \mathrm{G}_{\underline{s}} \to \mathrm{H}_{\underline{s}}$. Soit $g \in \pi_1(\mathrm{S}, \underline{s})$. L'automorphisme $u_{\underline{s'}}^{-1} \circ u_{g\underline{s'}}$ de $\mathrm{G}_{\underline{s}}$ ne dépend que de g (et pas du choix de H, de u ou de $\underline{s'}$). Cela définit une opération à droite de $\pi_1(\mathrm{S}, \underline{s})$ sur $\mathrm{G}_{\underline{s}}$ et donc par transposition une opération à gauche de $\pi_1(\mathrm{S}, \underline{s})$ dans M.

8. Le théorème de densité

8.1. Énoncé

Théorème. – *Soit* S *un schéma. Soit* G *un* S*-schéma en groupes de type fini de type multiplicatif. Pour* $n \geqslant 1$, *notons* ${}_n\mathrm{G}$ *le noyau de la multiplication par* n *dans* G. *Alors :*

a) *Tout sous-*S*-schéma fermé de* G *qui contient tous les* ${}_n\mathrm{G}$ *est égal à* G.

b) *Tout sous-*S*-schéma en groupes de* G *qui contient tous les* ${}_n\mathrm{G}$ *est égal à* G.

Démontrons a). Il suffit de traiter le cas où S est affine. Il s'agit alors de démontrer qu'une fonction régulière sur G qui est nulle dans chacun des ${}_n\mathrm{G}$ est nulle. On peut supposer qu'il existe un S-schéma affine fidèlement plat S' qui déploie G. Comme une fonction régulière sur G qui est nulle dans $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ est nulle, on est ramené au cas où G est diagonalisable. Nous pouvons donc supposer que $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}[\mathrm{M}])$, où M est un groupe commutatif de type fini, disons $\mathrm{M} = \mathbb{Z}^r \times \mathrm{N}$, où N est un groupe fini commutatif d'ordre d.

L'anneau A[M] s'identifie à $\mathrm{A}[t_1, \ldots, t_r, t_1^{-1}, \ldots, t_r^{-1}][\mathrm{N}]$ et, si $n \geqslant 1$ est multiple de d, l'anneau $\mathrm{A}[\mathrm{M}/n\mathrm{M}]$ s'identifie à $\big(\mathrm{A}[t_1, \ldots, t_r]/(t_1^n - 1, \ldots, t_r^n - 1)\big)[\mathrm{N}]$. Soit $f \in \mathrm{A}[\mathrm{M}]$. Exprimons f comme un polynôme de Laurent en $t_1, \ldots, t_r$ à coefficients dans A[N] et notons m un majorant des valeurs absolues des exposants avec lesquels les t_i interviennent dans cette expression. Choisissons un entier $n > 2m$ multiple de d. Alors le fait que l'image de f dans $\mathrm{A}[\mathrm{M}/n\mathrm{M}]$ soit nulle implique $f = 0$.

Démontrons b). Lorsque $S = \mathrm{Spec}(k)$ où k est un corps, tout sous-S-schéma en groupes de G est fermé, et b) résulte de a). Dans le cas général, soit H un sous-S-schéma en groupes de G qui contient tous les ${}_n\mathrm{G}$. Alors d'après ce qui précède ses fibres sont égales à celles de G. Cela implique que H a même ensemble sous-jacent que G, donc est fermé. On conclut par a). □

Dans [**1**, t. II, exposé IX, th. 4.7], Grothendieck démontre un énoncé plus fort que a) : tout sous-schéma fermé d'un ouvert U de G qui contient tous les ${}_n\mathrm{G} \cap \mathrm{U}$ est égal à U. C'est techniquement plus difficile, et n'est pas nécessaire pour les deux applications du § 8.2.

Remarque. – Le théorème est faux si l'on ne suppose pas G de type fini sur S. En effet si l'on pose $\mathrm{G} = \mathrm{D}(\mathbb{Q})_{\mathrm{S}}$, on a ${}_n\mathrm{G} = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

8.2. Applications

Soit G un S-schéma en groupes. Alors :

a) Soient H et H′ deux sous-S-schémas en groupes de G, avec H de type fini de type multiplicatif . Si ${}_n\mathrm{H} \subset {}_n\mathrm{H}'$ pour tout $n \geqslant 1$, on a $\mathrm{H} \subset \mathrm{H}'$.

b) Soit H un S-schéma en groupes de type fini de type multiplicatif. Si deux homomorphismes u, v de H dans G coïncident dans ${}_n\mathrm{H}$ pour tout $n \geqslant 1$, ils sont égaux.

En appliquant l'assertion b) du § 8.1 au sous-S-schéma en groupes $\mathrm{H} \cap \mathrm{H}'$ de H, on obtient $\mathrm{H} \cap \mathrm{H}' = \mathrm{H}$, d'où a). En l'appliquant à l'égalisateur de u et v dans H, on obtient b).

III. OPÉRATIONS DE SCHÉMAS EN GROUPES DE TYPE MULTIPLICATIF

9. Représentations linéaires de schémas en groupes

9.1. Le foncteur des endomorphismes d'un module quasi-cohérent

Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent. Pour tout S-schéma $\mathrm{T} \xrightarrow{p} \mathrm{S}$, notons $\mathscr{F}_{\mathrm{T}}$ le $\mathscr{O}_{\mathrm{T}}$-module $p^*(\mathscr{F})$ et E(T) l'anneau $\mathrm{End}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}}(\mathscr{F}_{\mathrm{T}})$. Si $u : \mathrm{T}' \to \mathrm{T}$ est un morphisme de S-schémas, notons $\mathrm{E}(u) : \mathrm{E}(\mathrm{T}) \to \mathrm{E}(\mathrm{T}')$ l'homomorphisme d'anneaux qui à un endomorphisme du $\mathscr{O}_{\mathrm{T}}$-module $\mathscr{F}_{\mathrm{T}}$ associe l'endomorphisme du $\mathscr{O}_{\mathrm{T}'}$-module $\mathscr{F}_{\mathrm{T}'}$ qui s'en déduit par le changement de base u. On définit ainsi un foncteur contravariant E de la catégorie des S-schémas dans celle des anneaux, que l'on note $\underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{F})$. On définit de même son sous-foncteur $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{F})$: c'est un foncteur contravariant de la catégorie des S-schémas dans celle des groupes.

93

9.2. Représentations linéaires des schémas en groupes

Soit G un S-schéma en groupes. On appelle *représentation linéaire* de G dans un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent $\mathscr{F}$ un homomorphisme $h_{\mathrm{G}} \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{F})$ de foncteurs en groupes : la donnée d'un tel homomorphisme est la donnée pour tout S-schéma T d'un homomorphisme de groupes $\mathrm{G}(\mathrm{T}) \to \mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}}(\mathscr{F}_{\mathrm{T}})$, fonctoriel en T.

La représentation de G dans $\mathscr{F}$ est dite *fidèle* si, pour tout S-schéma T, l'homomorphisme de groupes $\mathrm{G}(\mathrm{T}) \to \mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}}(\mathscr{F}_{\mathrm{T}})$ est injectif.

On appelle *$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module des invariants* de la représentation et on note $\mathscr{F}^{\mathrm{G}}$ le sous-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module de $\mathscr{F}$ défini comme suit : ses sections sur un ouvert U de S sont les sections s de $\mathscr{F}$ sur U telles que, pour tout U-schéma T, la section s_{T} de $\mathscr{F}_{\mathrm{T}}$ déduite de s par changement de base soit fixée par G(T).

Un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent muni d'une représentation linéaire de G est appelé un G - $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent.

9.3. Variante

Soient G un S-schéma en groupes et $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent. La donnée d'une représentation linéaire de G dans $\mathscr{F}$ équivaut à la donnée d'un morphisme de foncteurs $\varphi : h_{\mathrm{G}} \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{F})$ tel que, pour tout S-schéma T, l'application $\varphi(\mathrm{T})$: $\mathrm{G}(\mathrm{T}) \to \mathrm{End}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}}(\mathscr{F}_{\mathrm{T}})$ satisfasse les relations $\varphi(\mathrm{T})(gg') = \varphi(\mathrm{T})(g) \circ \varphi(\mathrm{T})(g')$ pour $g, g' \in \mathrm{G}(\mathrm{T})$ et $\varphi(\mathrm{T})(e) = \mathrm{id}_{\mathscr{F}_{\mathrm{T}}}$.

Or, d'après le lemme de Yoneda, la donnée d'un morphisme de foncteurs $\varphi : h_{\mathrm{G}} \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{F})$ est équivalente à la donnée d'un endomorphisme ψ du $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$-module $\mathscr{F}_{\mathrm{G}}$. Le fait que φ satisfasse les relations précédentes se traduit par les conditions suivantes sur ψ :

a) Soient ψ_1, ψ_2, ψ_3 les endomorphismes du $\mathscr{O}_{\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{G}}$-module $\mathscr{F}_{\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{G}}$ déduits de ψ par les changements de base pr_1, pr_2 et m (la loi de composition de G). On a $\psi_3 = \psi_1 \circ \psi_2$.

b) L'endomorphisme du $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{F}$ déduit de ψ par le changement de base $e_{\mathrm{G}} : \mathrm{S} \to \mathrm{G}$ (section neutre de G) est l'identité de $\mathscr{F}$.

9.4. Le cas des schémas en groupes affines

Soit G un S-schéma en groupes affine. Notons $p : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ son morphisme structural et $\mathscr{A}$ la $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre de Hopf quasi-cohérente $p_*\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$. Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent. La donnée d'un endomorphisme ψ du $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$-module $\mathscr{F}_{\mathrm{G}} = p^*\mathscr{F}$ est équivalente à la donnée d'un homomorphisme μ de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules de $\mathscr{F}$ dans $p_*(p^*\mathscr{F}) \simeq \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}$. Pour que ψ vérifie les conditions a) et b) du § 9.3, il faut et il suffit que $\mu : \mathscr{F} \to \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}$ fasse de $\mathscr{F}$ un $\mathscr{A}$-comodule *à droite*, i.e. vérifie les deux conditions suivantes, où c désigne le coproduit de $\mathscr{A}$ et ε sa coünité :

a') Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F} & \xrightarrow{\mu} & \mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{A} \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu\otimes\mathrm{id}_{\mathscr{A}}} \\ \mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{A} & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathscr{F}}\otimes c} & \mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{A}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{A} \end{array}$$

est commutatif.

b') L'homomorphisme composé $\mathscr{F}\xrightarrow{\mu}\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{A}\xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathscr{F}}\otimes\varepsilon}\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{O}_{\mathrm{S}}\simeq\mathscr{F}$ est l'identité de $\mathscr{F}$.

Le $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{F}^{\mathrm{G}}$ des invariants de la représentation linéaire de G correspondante est le noyau de l'homomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $f\mapsto\mu(f)-f\otimes 1$ de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{A}$. C'est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent.

La catégorie des G - $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules quasi-cohérents est donc équivalente à la catégorie des $\mathscr{A}$-comodules à droite quasi-cohérents sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$. Lorsque G est plat sur S, cette catégorie est abélienne : en effet le produit tensoriel par $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ est dans ce cas exact, de sorte que le noyau et le conoyau d'un homomorphisme de $\mathscr{A}$-comodules à droites sont eux-mêmes des $\mathscr{A}$-comodules à droite.

9.5. Le cas des schémas en groupes diagonalisables

Soit M un groupe commutatif. Le S-schéma en groupe $\mathrm{D(M)_S}$ est affine et la $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre de Hopf quasi-cohérente associée est $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{M}]$.

Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent. Tout homomorphisme μ de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{M}]$ s'écrit de manière unique $f\mapsto\sum_{m\in\mathrm{M}}\mu_m(f)\otimes m$, où $(\mu_m)_{m\in\mathrm{M}}$ est une famille d'endomorphismes de $\mathscr{F}$ telle que, pour toute section f de $\mathscr{F}$ sur un ouvert U de S, la famille $(\mu_m(f))_{m\in\mathrm{M}}$ de sections de $\mathscr{F}$ sur U soit localement dans U à support fini dans M. Pour que μ satisfasse la condition a') du § 9.4, il faut et il suffit que l'on ait $\mu_m\circ\mu_m=\mu_m$ pour tout $m\in\mathrm{M}$ et $\mu_m\circ\mu_{m'}=0$ pour $m\neq m'$. Pour qu'elle satisfasse la condition b'), il faut et il suffit que l'on ait $\sum_{m\in\mathrm{M}}\mu_m=\mathrm{id}_{\mathscr{F}}$. Ces deux conditions signifient que les μ_m sont les projecteurs associés à une graduation de type M du $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent $\mathscr{F}$.

Ainsi, la donnée d'une représentation linéaire du S-schéma en groupes $\mathrm{D(M)_S}$ dans le $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent $\mathscr{F}$ équivaut à la donnée d'une graduation de type M sur $\mathscr{F}$.

Exemple. – Le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{\mathrm{m,S}}$ opère linéairement sur $\mathscr{F}$ par homothéties. L'application $\mathscr{F}\to\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[t,t^{-1}]$ qui définit la structure de comodule correspondante est $f\mapsto f\otimes t$.

Remarque. – L'interprétation de la graduation de type M associée à une représentation linéaire de $\mathrm{D(M)_S}$ dans $\mathscr{F}$ est la suivante : $\mathscr{F}_m$ est le plus grand sous-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent de $\mathscr{F}$, stable par la représentation, sur lequel $\mathrm{D(M)_S}$ opère via le caractère χ_m. On a en particulier $\mathscr{F}_0=\mathscr{F}^{\mathrm{G}}$.

Toute suite exacte de $\mathrm{D(M)_S}$ - $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules quasi-cohérents

$$0\longrightarrow\mathscr{F}'\xrightarrow{u}\mathscr{F}\xrightarrow{v}\mathscr{F}''\longrightarrow 0$$

qui est scindée en tant que suite exacte de $\mathscr{O}_S$-modules est aussi scindée en tant que suite exacte de $D(M)_S$ - $\mathscr{O}_S$-modules : en effet si l'homomorphisme v, qui est gradué de degré 0, possède une section, il possède une section graduée de degré 0.

10. Opérations de schémas en groupes

10.1. Définitions

Soit G un S-schéma en groupes. Notons m sa loi de composition. Soit X un S-schéma. Une opération à droite de G sur X est un morphisme $u : X \times_S G \to X$ de S-schémas tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times_S G \times_S G & \xrightarrow{\mathrm{id}_X \times m} & X \times_S G \\ {\scriptstyle u\times \mathrm{id}_G}\downarrow & & {\scriptstyle u}\downarrow \\ X \times_S G & \xrightarrow{u} & X \end{array}$$

soit commutatif et que le morphisme composé

$$X \xrightarrow{(\mathrm{id}_X, e_G \circ p_X)} X \times_S G \xrightarrow{u} X,$$

où $e_G : S \to G$ est la section neutre de G et $p_X : X \to S$ le morphisme structural de X, soit égal au morphisme identique id_X. Se donner une telle opération équivaut à se donner un antihomomorphisme du foncteur en groupes h_G dans le foncteur en groupes $\underline{\mathrm{Aut}}_S(X)$.

On dit que G *opère librement* sur X si pour tout S-schéma T, G(T) opère librement dans X(T). Cela équivaut à dire que $v = (\mathrm{pr}_1, u) : X \times_S G \to X \times_S X$ est un monomorphisme de schémas. On dit que l'opération de G est *fidèle* si pour tout S-schéma T, l'homomorphisme de G(T) dans $\mathrm{Aut}_T(X_T)$ est injectif, i.e. si le morphisme de foncteurs $h_G \to \underline{\mathrm{Aut}}_S(X)$ est un monomorphisme.

Lorsque le S-schéma X est affine et que $\mathscr{B}$ désigne la $\mathscr{O}_S$-algèbre quasi-cohérente associée, la donnée d'une opération à droite de G sur X équivaut à la donnée d'une représentation linéaire de G dans le $\mathscr{O}_S$-module quasi-cohérent $\mathscr{B}$ telle que, pour tout S-schéma T, G(T) opère sur $\mathscr{B}_T$ par automorphismes de $\mathscr{O}_T$-algèbres.

Lorsque de plus G est un S-schéma affine et que $\mathscr{A}$ désigne la $\mathscr{O}_S$-algèbre quasi-cohérente associée, la donnée d'une opération à droite de G sur X équivaut à la donnée d'un homomorphisme $\mu : \mathscr{B} \to \mathscr{B} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A}$ de $\mathscr{O}_S$-*algèbres*, qui munit $\mathscr{B}$ d'une structure de $\mathscr{A}$-comodule à droite. Lorsque $G = D(M)_S$, où M est un groupe commutatif, la donnée d'une opération de G sur X équivaut à la donnée d'une graduation de type M sur la $\mathscr{O}_S$-algèbre $\mathscr{B}$, compatible avec la structure d'algèbre.

10.2. Torseurs sous un schéma en groupes diagonalisable

Soit G un S-schéma en groupes. On appelle G-*torseur à droite* un S-schéma X muni d'une opération à droite $u : \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{X}$ de G et localement isomorphe pour la topologie *fpqc* à G muni de son opération naturelle par multiplication à droite. Cela implique (par descente fidèlement plate) que le S-morphisme $v = (\mathrm{pr}_1, u) : \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ est un isomorphisme, la réciproque étant vraie lorsque X est fidèlement plat et quasi-compact sur S. Notons enfin que, si G est affine (resp. fidèlement plat) sur S, il en est de même de tout G-torseur à droite.

Soit M un groupe commutatif. Nous savons déjà que tout $\mathrm{D(M)_S}$-torseur est affine sur S. Inversement, soit X un S-schéma affine dont la $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre quasi-cohérente $\mathscr{B}$ est munie d'une graduation de type M qui définit une opération de $\mathrm{D(M)_S}$ sur X. Pour que X soit un $\mathrm{D(M)_S}$-torseur, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées :

a) pour tout $m \in \mathrm{M}$, $\mathscr{B}_m$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module inversible ;

b) pour m, m' dans M, l'homomorphisme de multiplication $\mathscr{B}_m \otimes \mathscr{B}_{m'} \to \mathscr{B}_{m+m'}$ est un isomorphisme.

Si X est un $\mathrm{D(M)_S}$-torseur, la $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre graduée $\mathscr{B}$ est isomorphe localement pour la topologie *fpqc* à $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{M}]$, d'où a) et b). Inversement, supposons les conditions a) et b) satisfaites. Alors X est fidèlement plat sur S d'après a) et le morphisme $v : \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ est un isomorphisme d'après b), donc X est un $\mathrm{D(M)_S}$-torseur.

Les conditions a) et b) sont équivalentes à :

c) l'homomorphisme $\mathscr{O}_{\mathrm{S}} \to \mathscr{B}_0$ est un isomorphisme ;

d) On a $\mathscr{B}_m \mathscr{B} = \mathscr{B}$ pour tout $m \in \mathrm{M}$.

Il est clair que b) implique d). Par ailleurs la condition b) pour $m = m' = 0$ implique que l'homomorphisme considéré en c) est un isomorphisme après tensorisation sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ par $\mathscr{B}_0$; donc sous l'hypothèse a), elle implique c).

Inversement, supposons c) et d) satisfaites. Soit $m \in \mathrm{M}$. Il existe alors des sections $a_1, \ldots, a_n$ de $\mathscr{B}_m$ et $b_1, \ldots, b_n$ de $\mathscr{B}_{-m}$ telles que $a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = 1$. Les $a_i b_i$ sont d'après c) des sections de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ et les ouverts distingués U_i où elles sont inversibles recouvrent S. Au-dessus de U_i, a_i est une section de $\mathscr{B}_m$ inversible dans $\mathscr{B}$. Il s'en suit que pour tout $m' \in \mathrm{M}$ l'homomorphisme $\mathscr{B}_{m'} \xrightarrow{a_i} \mathscr{B}_{m+m'}$ est un isomorphisme, ce qui implique que l'homomorphisme $\mathscr{O}_{\mathrm{S}} \xrightarrow{a_i} \mathscr{B}_m$ est un isomorphisme et que l'homomorphisme de multiplication $\mathscr{B}_m \otimes \mathscr{B}_{m'} \to \mathscr{B}_{m+m'}$ est un isomorphisme pour tout $m' \in \mathrm{M}$.

10.3. Opérations de schémas en groupes diagonalisables sur les schémas affines

Soit M un groupe commutatif. Soit X un S-schéma affine sur lequel le S-schéma en groupes $\mathrm{G} = \mathrm{D(M)_S}$ opère *librement*. Nous allons démontrer qu'il existe un S-schéma affine Y et un morphisme de S-schémas $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ possédant les propriétés suivantes :

a) le morphisme π est G-invariant : cela signifie que le S-morphisme $u : \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{X}$ qui définit l'opération de G est un Y-morphisme, et implique que le Y-schéma en groupes $\mathrm{G_Y}$ opère sur le Y-schéma X ;

b) muni de cette opération de $\mathrm{G_Y}$, X est un $\mathrm{G_Y}$-torseur.

Ces propriétés impliquent que le schéma quotient X/G existe, qu'il s'identifie à Y, qu'il est affine sur S et que le morphisme canonique $X \to X/G$ est fidèlement plat (et affine, donc quasi-compact).

On peut supposer S affine. La $\mathscr{O}_S$-algèbre quasi-cohérente $\mathscr{B}$ associée à X est graduée de type M. Posons $Y = \mathrm{Spec}(\mathscr{B}_0)$. C'est un S-schéma affine. On déduit de l'injection canonique $\mathscr{B}_0 \to \mathscr{B}$ un morphisme de S-schémas $X \to Y$. Il est G-invariant parce que $\mathscr{B}_0$ est concentrée en degré 0. Pour conclure, il nous suffira d'après le § 10.2 de démontrer que l'on a $\mathscr{B}_m\mathscr{B} = \mathscr{B}$ pour tout $m \in M$.

Soit N un sous-groupe de M. Posons $\mathfrak{b} = \sum_{m \notin N} \mathscr{B}_m\mathscr{B}$. Comme $\mathfrak{b}$ est un idéal gradué de $\mathscr{B}$ et que l'algèbre graduée quotient $\mathscr{B}/\mathfrak{b}$ est concentrée en degrés nuls modulo N, le sous-schéma fermé X' de X défini par $\mathfrak{b}$ est stable par G et $D(M/N)_S$ opère trivialement sur X'. Comme G opère librement sur X, cela implique que X' est vide, i.e. $\mathfrak{b}$ égal à $\mathscr{B}$, si $N \neq M$.

Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $\mathscr{B}_0$. L'ensemble N des $m \in M$ tels que $\mathscr{B}_m\mathscr{B}_{-m}$ ne soit pas contenu dans $\mathfrak{m}$ est clairement un sous-groupe de M. L'idéal $\mathfrak{b} = \sum\limits_{m \notin N} \mathscr{B}_m\mathscr{B}$ est tel que $\mathfrak{b} \cap \mathscr{B}_0 \subset \mathfrak{m}$, donc est distinct de $\mathscr{B}$. D'après l'alinéa précédent, N est égal à M.

Soit $m \in M$. Il résulte de l'alinéa précédent que l'idéal $\mathscr{B}_m\mathscr{B}_{-m}$ de $\mathscr{B}_0$ n'est contenu dans aucun idéal maximal de $\mathscr{B}_0$. Il est donc égal à $\mathscr{B}_0$ et contient 1. On a par suite $\mathscr{B}_m\mathscr{B} = \mathscr{B}$.

Tirons quelques conséquences de ces résultats :

a) Le morphisme $v : X \times_S G \to X \times_S X$ est une immersion fermée.

b) Soit s une section du S-schéma X. Le morphisme orbital de s, composé des morphismes $G \simeq S \times_S G \xrightarrow{s \times \mathrm{id}_G} X \times_S G \xrightarrow{u} X$, est une immersion fermée.

c) Y est le quotient de X par l'action de G en tant que faisceau *fpqc*.

d) Si X est un S-schéma de type fini (resp. de présentation finie), il en est de même de $Y = X/G$.

L'assertion a) résulte de la surjectivité des homomorphismes $\mathscr{B}_m \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{B}_{m'} \to \mathscr{B}_{m+m'}$, b) s'en déduit par le changement de base $s : S \to X$ et c) est une conséquence formelle du fait que X est un G_Y-torseur et que G_Y est fidèlement plat et quasi-compact sur Y.

L'assertion d) est claire si X est vide. Si le S schéma X est de type fini (resp. de présentation finie) et non vide, la $\mathscr{O}_S$-algèbre $\mathscr{B}$ est de type fini (resp. de présentation finie) et ses composantes homogènes $\mathscr{B}_m$ sont non nulles. Cela implique que le groupe M de sa graduation est de type fini. Mais alors la $\mathscr{B}_0$-algèbre $\mathscr{B}$ est de présentation finie, puisque localement isomorphe pour la topologie *fpqc* à $\mathscr{B}_0[M]$. On en déduit que la $\mathscr{O}_S$-algèbre $\mathscr{B}_0$ est de type fini (resp. de présentation finie) par le lemme suivant d'algèbre commutative ([**3**, cor. 11.3.17]) : si $u : A \to B$ et $v : B \to C$ sont des homomorphismes d'anneaux commutatifs qui font de C une B-algèbre fidèlement plate de présentation finie, alors le fait que la A-algèbre C soit de type fini (resp. de présentation finie) implique que la A-algèbre B a la même propriété.

10.4. Généralisation aux schémas en groupes de type multiplicatif

Tous les résultats énoncés au § 10.3 pour un S-schéma en groupes diagonalisable restent valables lorsque l'on suppose seulement que G est un S-schéma en groupes de type multiplicatif. Ils se déduisent en fait des précédents par descente fidèlement plate.

En voici une conséquence : Soit u un homomorphisme d'un S-schéma en groupes G de type multiplicatif dans un S-schéma en groupes affine H. Si le noyau de u est nul (au sens schématique), u est une immersion fermée, le S-schéma quotient $\mathrm{Y} = \mathrm{H}/\mathrm{G}$ existe et est affine, et H est un torseur à droite sur Y de groupe G_{Y}.

Remarque. – Il n'est pas vrai en général qu'un homomorphisme de S-schémas en groupes $\mathrm{G} \to \mathrm{H}$ dont le noyau est nul est une immersion fermée, même lorsque G et H sont affines, plats et de présentation finie sur S. Exemple : S est le spectre premier d'un anneau de valutation discrète, H est le S-schéma en groupes $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}$ et G le complémentaire du point non neutre de la fibre spéciale de H.

11. Cohomologie de Hochschild

11.1. Définition

Soient G un S-schéma en groupes et $\mathscr{F}$ un G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent. Pour tout S-schéma T, notons $\mathscr{F}(\mathrm{T})$ le groupe des sections du $\mathscr{O}_{\mathrm{T}}$-module $\mathscr{F}_{\mathrm{T}}$. C'est un $\Gamma(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-module sur lequel G(T) opère à gauche. Pour tout entier $n \geqslant 0$, posons $\mathrm{C}^n(\mathrm{G}, \mathscr{F}) = \mathscr{F}(\mathrm{G}^n)$. Par le lemme de Yoneda, un élément de $\mathrm{C}^n(\mathrm{G}, \mathscr{F})$ s'interprète comme la donnée, pour tout S-schéma T, d'une n-chaîne du G(T)-module $\mathscr{F}(\mathrm{T})$, fonctorielle en T. Cela permet de définir sur $\mathrm{C}(\mathrm{G}, \mathscr{F}) = \bigoplus \mathrm{C}^n(\mathrm{G}, \mathscr{F})$ une différentielle, qui en fait un complexe de $\Gamma(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-modules gradués.

Les $\Gamma(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-modules de cohomologie de ce complexe se notent $\mathrm{H}^n(\mathrm{G}, \mathscr{F})$. Les éléments de $\mathrm{H}^0(\mathrm{G}, \mathscr{F})$ sont les sections de $\mathscr{F}$ qui, après n'importe quel changement de base $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, sont invariantes par G(T). Autrement dit, $\mathrm{H}^0(\mathrm{G}, \mathscr{F})$ est le $\Gamma(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-module des sections de $\mathscr{F}^{\mathrm{G}}$.

11.2. Le cas affine

Explicitons cela lorsque G est affine sur S, en notant $\mathscr{A}$ la $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre de Hopf quasi-cohérente associée, c son coproduit, ε sa coünité et $\mu : \mathscr{F} \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{A}$ l'homomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules qui définit la structure de $\mathscr{A}$-comodule à droite de $\mathscr{F}$.

Alors $\mathrm{C}^n(\mathrm{G}, \mathscr{F})$ s'identifie au $\Gamma(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-module des sections de $\mathscr{F} \otimes \mathscr{A} \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}$ (produits tensoriels sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, n facteurs égaux à $\mathscr{A}$), la différentielle étant donnée par

$$\begin{aligned} d(f \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \mu(f) &\otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes c(a_i) \otimes \cdots \otimes a_n \\ &+ (-1)^{n+1} f \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1. \end{aligned}$$

Exemple. – Soit $\mathscr{P}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent. Posons $\mathrm{Ind}(\mathscr{P}) = \mathscr{P} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}$. L'homomorphisme

$$\mathrm{id}_{\mathscr{P}} \otimes c : \mathscr{P} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{P} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}$$

munit $\mathrm{Ind}(\mathscr{P})$ d'une structure de $\mathscr{A}$-comodule à droite, et donc d'une structure de G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent. On dit que c'est *l'induit de* $\mathscr{P}$. Sa cohomologie est nulle en degrés > 0 : en effet, si s désigne l'endomorphisme de degré -1 du $\Gamma(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-module gradué $\mathrm{C}(\mathrm{G}, \mathrm{Ind}(\mathscr{P}))$ défini par

$$s((f \otimes a) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \varepsilon(a)(f \otimes a_1) \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n,$$

on a $sd + ds = \mathrm{id}$ en degrés > 0.

99

L'homomorphisme $\mu : \mathscr{F} \to \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A}$ est un homomorphisme de $\mathscr{A}$-comodules de $\mathscr{F}$ dans $\mathrm{Ind}(\mathscr{F})$. Il est injectif et son image est un facteur direct du $\mathscr{O}_S$-module $\mathrm{Ind}(\mathscr{F})$, car $\mathrm{id}_{\mathscr{F}} \otimes \varepsilon$ en est une rétraction $\mathscr{O}_S$-linéaire.

Remarque. – Supposons que le schéma S soit lui aussi affine et que G soit affine et plat sur S. Alors, si $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ est une suite exacte courte de G - $\mathscr{O}_S$-modules, la suite de complexes $0 \to \mathrm{C}(\mathrm{G}, \mathscr{F}') \to \mathrm{C}(\mathrm{G}, \mathscr{F}) \to \mathrm{C}(\mathrm{G}, \mathscr{F}'') \to 0$ est exacte, d'où une suite exacte longue de cohomologie

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{G},\mathscr{F}') \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{G},\mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{G},\mathscr{F}'') \\ \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathscr{F}') \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathscr{F}'') \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

La catégorie abélienne des G - $\mathscr{O}_S$-modules quasi-cohérents a suffisamment d'objets injectifs (l'induit de tout $\mathscr{O}_S$-module quasi-cohérent injectif en est un) et les foncteurs $\mathscr{F} \mapsto \mathrm{H}^n(\mathrm{G}, \mathscr{F})$ sont les foncteurs dérivés du foncteur exact à gauche $\mathscr{F} \mapsto \Gamma(\mathscr{F}^{\mathrm{G}})$. Si S′ est un S-schéma affine et plat, $\mathrm{H}^n(\mathrm{G}_{S'}, \mathscr{F}_{S'})$ s'identifie à $\mathrm{H}^n(\mathrm{G}, \mathscr{F}) \otimes_{\Gamma(\mathscr{O}_S)} \Gamma(\mathscr{O}'_S)$.

11.3. Cohomologie des schémas en groupes de type multiplicatif

Supposons S affine et soit G un S-schéma en groupes de type multiplicatif. Rappelons que G est affine et plat sur S. Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_S$-module quasi-cohérent muni d'une opération linéaire de G. On a $\mathrm{H}^n(\mathrm{G}, \mathscr{F}) = 0$ pour $n \geqslant 1$.

D'après le § 11.2, l'homomorphisme de G - $\mathscr{O}_S$-modules $\mu : \mathscr{F} \to \mathrm{Ind}(\mathscr{F})$ possède une rétraction $\mathscr{O}_S$-linéaire. Si G est diagonalisable, il possède aussi une rétraction G - $\mathscr{O}_S$-linéaire (§ 9.5). Comme la cohomologie de $\mathrm{Ind}(\mathscr{F})$ est nulle en degrés $\geqslant 1$, il en est de même de celle de $\mathscr{F}$.

Il existe une famille finie de schémas affines S_i et de morphismes plats $\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}$, dont les images recouvrent S, tels que $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_i}$ soit diagonalisable sur S_i pour tout $i \in \mathrm{I}$. Par suite, si k désigne l'anneau des fonctions régulières de S et k_i celui de S_i, on a $\mathrm{H}^n(\mathrm{G}, \mathscr{F}) \otimes_k k_i = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ et tout i. On conclut en remarquant que l'anneau produit des k_i est fidèlement plat sur k.

IV. PROPRIÉTÉS INFINITÉSIMALES DES SCHÉMAS EN GROUPES DE TYPE MULTIPLICATIF

12. Rigidité infinitésimale des schémas en groupes de type multiplicatif

Dans ce paragraphe, S_0 désigne un sous-schéma fermé de S défini par un nilidéal $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_S$ (i.e. qui a même ensemble sous-jacent que S).

Le foncteur $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{G}_0 = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0$ de la catégorie des S-schémas en groupes de type multiplicatif dans celle des S_0-schémas de type multiplicatif est pleinement fidèle.

Il s'agit de démontrer que, si H et G sont des S-schémas en groupes de type multiplicatif, l'application $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S\text{-}Gr}}(\mathrm{H}, \mathrm{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_0\text{-}\mathrm{Gr}}(\mathrm{H}_0, \mathrm{G}_0)$ est bijective. Il suffit de traiter le cas où S est affine et où il existe un S-schéma affine S′ fidèlement plat qui déploie H et G. En utilisant les suites exactes de descente de morphismes par $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ d'une part, $\mathrm{S}'_0 \to \mathrm{S}_0$ d'autre part, on se ramène au cas où H et G sont diagonalisables, disons $\mathrm{H} = \mathrm{D}(\mathrm{N})_{\mathrm{S}}$ et $\mathrm{G} = \mathrm{D}(\mathrm{M})_{\mathrm{S}}$. Mais alors la donnée d'un homomorphisme de H dans G est équivalente à la donnée d'une application de $\mathrm{M} \times \mathrm{S}$ dans N, multiplicative en la première variable et localement constante en la seconde, et il en de même de la donnée d'un homomorphisme de H_0 dans G_0 puisque S_0 a le même ensemble sous-jacent que S.

Tout S_0-schéma en groupes G_0 de type multiplicatif quasi-isotrivial se relève en un S-schéma en groupes G de type multiplicatif unique à isomorphisme unique près. Celui-ci est quasi-isotrivial. Si G_0 est trivial (resp. localement trivial ; resp. isotrivial ; resp. localement isotrivial), il en est de même de G.

L'unicité à isomorphisme unique près résulte de la pleine fidélité précédente. Elle implique que la question de l'existence est de nature locale sur S pour la topologie de Zariski. Comme le foncteur $X \mapsto X_0$ est une équivalence de la catégorie des S-schémas étales sur celle des S_0-schémas étales, il nous suffit de traiter le cas où S est affine et où il existe un schéma affine S' et un morphisme étale surjectif $S' \to S$ tel que S'_0 déploie G_0. Comme $G'_0 = G_0 \times_{S_0} S'_0$ est diagonalisable sur S'_0, il se relève en un schéma en groupes diagonalisable G' sur S', et en vertu de la pleine fidélité déjà prouvée, la donnée de descente sur G'_0 se relève de manière unique en une donnée de descente sur G'. Celle-ci est effective puisque G' est affine sur S'. Ainsi G' se descend en un S-schéma en groupes G sur S. Celui-ci a les propriétés voulues.

Si G_0 est isotrivial, il existe un morphisme étale surjectif et fini $S' \to S$ tel que S'_0 déploie G_0, et la même démonstration montre que G est isotrivial. La préservation des autres propriétés est immédiate.

Lorsque le faisceau d'idéaux $\mathscr{I}$ est localement nilpotent, on peut être plus précis. Tout S-schéma en groupes plat G tel que le S_0-schéma en groupes G_0 soit de type multiplicatif et quasi-isotrivial est lui-même de type multiplicatif (et quasi-isotrivial d'après ce qui précède).

On se ramène comme avant au cas où S est affine et où G_0 est diagonalisable. En raisonnant par récurrence, on se ramène au cas où l'idéal $\mathscr{I}$ est de carré nul. Le schéma G est affine puisqu'il a même ensemble sous-jacent que G_0. Notons alors k l'anneau de S, $k_0 = k/\mathrm{I}$ celui de S_0, A celui de G. Rappelons que A est une k-algèbre de Hopf. Notons c son coproduit. Puisque G_0 est diagonalisable, nous pouvons supposer que la k_0-algèbre de Hopf $A_0 = A/IA$ est $k_0[M]$, où M est un groupe commutatif, avec pour coproduit celui qui applique m sur $m \otimes m$ pour tout $m \in M$.

Soit $m \in M$. Démontrons que l'on peut relever m de manière unique en un élément $\widetilde{m}$ de A tel que $c(\widetilde{m}) = \widetilde{m} \otimes \widetilde{m}$. Commençons par choisir un relèvement quelconque f de m. C'est un élément inversible de A. On a $c(f) = (f \otimes f)(1 \otimes 1 + b)$, où $b \in \mathrm{I}(A \otimes_k A)$. Lorsqu'on écrit que $(c \otimes \mathrm{id})(c(f)) = (\mathrm{id} \otimes c)(c(f))$, on obtient, après simplification par $f \otimes f \otimes f$, la relation $b \otimes 1 + (c \otimes 1)(b) = 1 \otimes b + (1 \otimes c)(b)$. Soit $a \in IA$. Pour que $\widetilde{m} = f(1+a)$ vérifie $c(\widetilde{m}) = \widetilde{m} \otimes \widetilde{m}$, il faut et il suffit que $b = a \otimes 1 - c(a) + 1 \otimes a$.

Comme A est plat sur k et que $\mathrm{I}^2 = 0$, IA s'identifie à $\mathrm{I} \otimes_{k_0} A_0$ et $\mathrm{I}(A \otimes_k A)$ à $\mathrm{I} \otimes_{k_0} A_0 \otimes_{k_0} A_0$. Munissons I de la structure de A_0-comodule définie par l'application $x \mapsto x \otimes 1$ de I dans $\mathrm{I} \otimes_{k_0} A_0$. La première relation s'interprète alors en disant que b est un 2-cocycle et la seconde en disant qu'il est le 1-cobord de a, pour la cohomologie de Hochschild de ce comodule. L'existence de a résulte de la nullité du H^2, son unicité de la nullité du H^1 et du fait que la différentielle d_0 est nulle.

Notons alors $u : k[M] \to A$ l'homomorphisme de k-algèbres qui applique m sur $\widetilde{m}$ pour tout $m \in M$. C'est un isomorphisme modulo I. Si C désigne son conoyau, on a donc $C/IC = 0$, d'où $C = 0$. Comme A est plat sur k, le noyau N de u est tel que $N/IN = 0$, d'où $N = 0$. Ainsi u est bijectif. C'est par construction un isomorphisme d'algèbres de Hopf. Donc G est diagonalisable.

Remarque. – L'énoncé précédent ne s'étend pas au cas où $\mathscr{I}$ est un nilidéal : voir l'exemple donné dans la remarque 2 du § 16, où G est un relèvement plat sur S du groupe unité sur S_0 mais n'est pas le groupe unité sur S.

13. Application à la descente radicielle

Soit $u : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un morphisme fidèlement plat quasi-compact et radiciel, ce dernier qualificatif signifiant que u est injectif et que, pour tout $s' \in \mathrm{S}'$, le corps résiduel de s' est une extension radicielle de celui de $u(s')$. Le foncteur $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ est une équivalence de la catégorie des S-schémas en groupes de type multiplicatif dans celle des S′-schémas en groupes de type multiplicatif.

Ensemblistement, u est bijectif, et il en est de même du morphisme diagonal $\Delta : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}' \otimes_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$. Comme ce dernier est une immersion, c'est une immersion fermée, à laquelle on peut appliquer les résultats du § 12. Soient H et G deux S-schémas en groupes de type multiplicatif. L'application $u^* : \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}\text{-}\mathrm{Gr}}(\mathrm{H}, \mathrm{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'\text{-}\mathrm{Gr}}(\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}, \mathrm{G}_{\mathrm{S}'})$ déduite de u est injective, et son image est l'égalisateur des applications p_1^* et p_2^* de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'\text{-}\mathrm{Gr}}(\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}, \mathrm{G}_{\mathrm{S}'})$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S}'\text{-}\mathrm{Gr}}(\mathrm{H}_{\mathrm{S}'\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S}'}, \mathrm{G}_{\mathrm{S}'\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S}'})$ déduites des deux projections de $\mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ sur S′. L'application $\Delta^* : \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S}'\text{-}\mathrm{Gr}}(\mathrm{H}_{\mathrm{S}'\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S}'}, \mathrm{G}_{\mathrm{S}'\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S}'}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'\text{-}\mathrm{Gr}}(\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}, \mathrm{G}_{\mathrm{S}'})$ déduite de $\Delta : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ est bijective d'après le § 12. Comme $\Delta^* \circ p_1^*$ et $\Delta^* \circ p_2^*$ sont toutes deux égales à l'application identique de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'\text{-}\mathrm{Gr}}(\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}, \mathrm{G}_{\mathrm{S}'})$, on a $p_1^* = p_2^*$, donc u est bijective. Cela prouve que le foncteur $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ est pleinement fidèle.

Soit G′ un S′-schéma en groupes de type multiplicatif. Considérons les deux $\mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$-schémas en groupes $\mathrm{G}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ et $\mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}'$. Les S′-schémas en groupes qui s'en déduisent par le changement de base Δ sont canoniquement isomorphes à G′. Il existe d'après le § 12 un unique $\mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ isomorphisme $v : \mathrm{G}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' \to \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}'$ qui, après changement de base par Δ devient l'identité de G′. On vérifie que v définit une donnée de descente sur G′ : si p_{12}, p_{23} et p_{13} sont les trois projections canoniques de $\mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ sur $\mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, $p_{13}^* v$ est égal à $p_{23}^* v \circ p_{12}^* v$ car tous deux s'identifient après le changement de base diagonal $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ (qui est une immersion fermée bijective) à l'identité de G′. Cette donnée de descente est effective puisque G′ est affine. Il existe donc un S-schéma en groupes G tel que $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ soit isomorphe à G′ ; il est de type multiplicatif.

14. Conjugaison d'homomorphismes

Supposons S affine et soit S_0 un sous-schéma fermé de S défini par un idéal $\mathscr{I}$ nilpotent. Soient u et v deux homomorphismes d'un S-schéma en groupes de type multiplicatif H dans un S-schéma en groupes G. Notons u_0 et v_0 les homomorphismes de H_0 dans G_0 qui s'en déduisent par le changement de base $\mathrm{S}_0 \to \mathrm{S}$. Alors :

a) Si $u_0 = v_0$ et $\mathscr{I}^2 = 0$, il existe $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ tel que $v = \mathrm{Int}(g) \circ u$ et $g_0 = e$.

b) Si G est lisse sur S et que $v_0 = \mathrm{Int}(g_0) \circ u_0$ pour un $g_0 \in \mathrm{G}_0(\mathrm{S}_0)$, il existe $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ relevant g_0 tel que $v = \mathrm{Int}(g) \circ u$.

c) Si G est lisse sur S, tout homomorphisme de H_0 dans G_0 se relève en un homomorphisme de H dans G.

Lorsque $\mathscr{I}^2 = 0$, l'obstruction à a) vit dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{H}_0, \mathscr{F})$ où $\mathscr{F}$ est un certain $\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}$-module quasi-cohérent muni d'une opération linéaire de H_0, à savoir $\mathscr{L}ie(\mathrm{G}_0/\mathrm{S}_0) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{I}$. Elle est donc nulle. On en déduit b) par récurrence sur l'ordre de nilpotence de $\mathscr{I}$ (en utilisant le fait que g_0 se relève dans G(S) puisque G est lisse).

Lorsque $\mathscr{I}^2 = 0$, l'homomorphisme de H_0 dans G_0 donné dans c) se relève en un S-morphisme de schémas $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ puisque G est lisse ; l'obstruction à ce que ce soit un homomorphisme de S-schémas en groupes vit dans $\mathrm{H}^2(\mathrm{H}_0, \mathscr{F})$, d'où c) dans ce cas ; le cas général s'en déduit par récurrence.

102

15. Conjugaison de sous-groupes de type multiplicatif

Supposons S affine et soit S_0 un sous-schéma fermé de S défini par un idéal $\mathscr{I}$ nilpotent. Soient H et H′ deux sous-S-schémas en groupes de type multiplicatif d'un S-schéma en groupes G, H_0 et H'_0 ceux de G_0 qui s'en déduisent par le changement de base $S_0 \to S$. Alors :

a) Si $H_0 = H'_0$ et $\mathscr{I}^2 = 0$, il existe $g \in G(S)$ tel que $H' = \mathrm{Int}(g)(H)$ et $g_0 = e$.

b) Si G est lisse sur S et que $H'_0 = \mathrm{Int}(g_0)(H_0)$ pour un $g_0 \in G_0(S_0)$, il existe $g \in G(S)$ relevant g_0 tel que $H' = \mathrm{Int}(g)(H)$.

c) Si G est lisse sur S, tout sous-S_0-schéma en groupes H_0 de type multiplicatif de G_0 se relève en un sous-S-schéma en groupes plat H de G, et un tel relèvement est nécessairement de type multiplicatif.

Le § 12 nous assure qu'il existe un isomorphisme de H sur H′ relevant l'identité de H_0. Alors a) résulte de l'assertion a) du § 14, et b) s'en déduit par récurrence (en utilisant le fait que g_0 se relève dans G(S) puisque G est lisse).

Démontrons c). Si H_0 est quasi-isotrivial , il existe d'après le § 12 un S-schéma en groupes de type multiplicatif H tel que $H \times_S S_0 = H_0$, et d'après le § 14, c), l'immersion $H_0 \to G_0$ se relève en un homomorphisme $H \to G$; c'est nécessairement une immersion. Enfin, d'après le § 12, tout relèvement plat de H_0 est isomorphe à H.

*L'hypothèse que H_0 est quasi-isotrivial est en fait superflue. En effet, puisque G est lisse sur S, il en est de même de G_0 sur S_0, donc chaque fibre de G_0 est localement de type fini ; il en est de même de la fibre correspondante de H_0, qui en est un sous-schéma fermé, et puisqu'elle est affine, elle est de type fini. Le type de H_0 en chaque point est donc un groupe commutatif de type fini. Il s'en suit que H_0 est de type fini, ce qui implique qu'il est quasi-isotrivial (§ 7.1, a)). $_*$

16. Rigidité infinitésimale dans le cas central

Soit S_0 un sous-schéma fermé de S défini par un idéal $\mathscr{I}$ localement nilpotent. Soient G un S-schéma en groupes de type multiplicatif et X un S-schéma sur lequel opère G. Supposons que l'opération de G_0 sur X_0 qui s'en déduit par le changement de base $S_0 \to S$ soit triviale. Alors l'opération de G sur X est triviale.

La question étudiée est de nature locale sur S pour la topologie *fpqc*. Il suffit donc de traiter le cas où S est affine et G diagonalisable, disons $G = D(M)_S$. Tout ouvert de X est stable par G, puisque G et X ont mêmes espaces topologiques sous-jacents que G_0 et X_0. On peut donc supposer X affine. Notons alors k l'anneau de S, I l'idéal nilpotent de k définissant S_0 et B l'anneau de X. C'est une k-algèbre graduée de type M et B/IB est concentré en degré 0. Pour tout $m \neq 0$ dans M, on a donc $B_m/IB_m = 0$, d'où $B_m = 0$. Cela démontre que l'opération de G sur X est triviale.

Remarque 1. – Le résultat précédent reste vrai lorsque $\mathscr{I}$ est un nilidéal, pourvu que X soit localement de type fini.

Reprenons en effet la démonstration : cette-fois, I est un nilidéal de k et la k-algèbre B est de type fini. Elle possède une partie génératrice finie C formée d'éléments homogènes. Il existe un idéal $J \subset I$ de k de type fini, donc nilpotent, tel que $c \in JB$ pour tout $c \in C$ de poids non nul. Pour tout $m \neq 0$, on a alors $B_m = JB_m$, d'où $B_m = 0$.

103

En voici deux applications :

a) Soient H un S-schéma en groupes de type multiplicatif et G un S-schéma en groupes. Si un homomorphisme central $u_0 : \mathrm{H}_0 \to \mathrm{G}_0$ se relève en un homomorphisme $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$, celui-ci est unique et central.

b) Soit G un S-schéma en groupes. Si un sous-S-schéma en groupes central de type multiplicatif H_0 de G_0 se relève en un sous-S-schéma en groupes de type multiplicatif H de G, celui-ci est unique et central.

On prouve que u est central dans a) en faisant opérer H sur G par $(h,g) \mapsto \mathrm{Int}(u(h))(g)$. On en déduit que H est central dans G dans b) en prenant pour u l'immersion $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$. Pour les assertions d'unicité, on peut supposer S affine et, en raisonnant par récurrence sur l'ordre de nilpotence de $\mathscr{I}$, que $\mathscr{I}^2 = 0$. On conclut alors par les assertions a) des § 13 et § 14.

Remarque 2. – Les assertions a) et b) restent vraies lorsque $\mathscr{I}$ est un nilidéal, pourvu que G soit localement de type fini.

L'hypothèse « G est localement de type fini » ne peut être supprimée lorsque $\mathscr{I}$ est un nilidéal. Soit en effet k un corps. Notons R l'anneau des séries de Puiseux en une indéterminée X à coefficients dans k. Son idéal maximal $\mathfrak{m}$ est plat sur R, puisque limite inductive d'idéaux principaux. Posons $\mathrm{R}' = \mathrm{R}/\mathfrak{m}\mathrm{X}$. Son idéal maximal $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}\mathrm{X}$ est un nilidéal. Comme $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$, $\mathfrak{m}'$ s'identifie à $\mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{R}'$, donc est plat sur R'. Munissons la R'-algèbre $\mathrm{A} = \mathrm{R}'[t, t^{-1}]$ du coproduit qui applique t sur $t \otimes t$. C'est une algèbre de Hopf. Notons A' l'ensemble des éléments $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n$ de A tels que $a_n \in \mathfrak{m}'$ pour $n \neq 0$. C'est une sous-algèbre de Hopf de A (en remarquant que $\mathrm{A}' \otimes_{\mathrm{R}'} \mathrm{A}'$ s'identifie à une sous-algèbre de $\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{R}'} \mathrm{A}$ puisque $\mathfrak{m}'$ est plat sur R'). Notons G le R'-schéma en groupes $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}')$. On déduit de l'injection canonique $\mathrm{A}' \to \mathrm{A}$ un homomorphisme de S-schémas en groupes $u : \mathbb{G}_{m,\mathrm{R}'} \to \mathrm{G}$. L'homomorphisme u_0 qui s'en déduit par le changement de base $\mathrm{R}' \to \mathrm{R}'/\mathfrak{m}'$ est trivial, bien que u ne le soit pas.

17. Conclusion

Soit G un S-schéma en groupes lisse et soit H un S-schéma en groupes de type multiplicatif. Notons F le foncteur contravariant de la catégorie des S-schémas dans celle des ensembles qui à tout S-schéma T associe l'ensemble des sous-S-schémas en groupes de type multiplicatif de G_T.

Les assertions c) des § 14 et § 15 montrent que les foncteurs $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-Gr}}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$ et F sont formellement lisses.

C'est la première étape de la démonstration de leur représentabilité par des S-schémas lisses et séparés, lorsque G est affine sur S et H de type fini sur S.

Références

[1] M. Demazure & A. Grothendieck – *Schémas en groupes (SGA 3), t. I, II, III*, Lecture Notes in Math., vol. 151, 152, 153, Springer, 1970.

[2] ______, *Schémas en groupes (SGA 3), t. I, III*, Documents Math., vol. 7–8, Soc. Math. France, 2011.

[3] A. Grothendieck – « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III », *Publ. Math. I.H.É.S.* **28** (1966), p. 255.

Joseph Oesterlé, UMR 7586 du CNRS, Institut Mathématique de Jussieu, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05 - France • *E-mail :* joseph.oesterle@imj-prg.fr

105